

Braun
E 1357 E

ARCHIV DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG

Unter Mitarbeit von

H. Busch, R. Feldtkeller, E. Hölzler, K. Hoffmann, O. Kirchner
E. Kramar, A. Mehlis, W. Nestel, H. Piloty, L. Pungs, F. Schröter, W. O. Schumann
M. Seddig, A. Siemens, R. Tamm, R. Theile, F. Tank, R. Vieweg, G. Wuckel

Begründet von

KARL WILLY WAGNER

Schriftleitung:

J. Piesch, J. Schunack, M. Strutt, A. Thoma

Geschäftsführende Redaktion:

F. Rühmann

BAND 15

OKTOBER 1961

HEFT 10

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART

KWR
KABELWERK RHEYDT AKT.-GES.
Trägerfrequenzkabel
RHEYDT (RHLD.)

INHALT

Originalmitteilungen:	Seite
Die Messung von Frequenzgängen mit Hilfe der Kreuzkorrelationsbeziehung	437
von G. Schweizer	
Reflexion und Transmission beim Einfall einer H_{0n} -Welle auf einen kegelförmigen Übergang zwischen zwei Hohlleitern	444
von G. Piefke	
Zur Frage der Fehlerfortpflanzung und Sicherheit bei der Übermittlung von Nachrichten unter Verwendung von elektronischen Analogrechnern zur Rückrechnung	455
von K. Löhn, H. Weinerth und H. Wolter	
Permanentmagnetische Fokussierungsanordnungen für Höchstfrequenzröhren	467
von P. Meyerer	
Das Einschalten von zwei Schwingungskreisen, die über eine fremdgesteuerte Reaktanz gekoppelt sind (Fall des parametrischen Verstärkers)	475
von H. Kaden	
Möglichkeiten zur Realisierung logischer (Boolescher) Funktionen mit rechteckmagnetischen Netzen	482
von U. Hölken	
Buchbesprechung	466

ARCHIV DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG

Schriftleitung:

Dr. phil. J. Piesch
Wien IV/50, Karlsplatz 13, Fernruf 657841

Dr.-Ing. J. Schunack,
Berlin-Lichterfelde 1, Drakestraße 1a, Fernruf 732261

Prof. Dr.-Ing. E. h. Dr. techn. M. Strutt,
Zürich 7, Gloriastraße 35, Fernruf 327330

Oberstudiendirektor Dr. phil. A. Thoma,
Fulda, Heinrich-von-Bibra-Platz 1,
Fernruf (vorm.) 2962, (nachm.) 4428

Geschäftsführende Redaktion und Anzeigenverwaltung:

Ing. Friedrich Rühmann

(17a) Karlsruhe-Durlach, Machstraße 4, Fernruf 42854

Alle Zuschriften werden entweder an die Schriftleitung oder an die Geschäftsführende Redaktion erbeten.

Geschäftliche Hinweise:

Der Bezug des Archivs der elektrischen Übertragung durch Verlag, Post und Buchhandel ist im Abonnement zum Preis von DM 20,— für das Vierteljahr möglich. Einzelhefte können zum Preis von DM 7,— geliefert werden.

Anzeigenaufträge und -anfragen bitten wir an die Anzeigenverwaltung der Zeitschrift zu richten.

RICHARD FELDTKELLER

THEORIE DER SPULEN UND ÜBERTRÄGER

3., neubearbeitete Auflage

VIII, 187 Seiten mit 143 Bildern, Ganzleinen DM 24,—

Spulen und Übertrager mit Kernen aus hochpermeablen Blechen und hochpermeablen Ferriten spielen in der Nachrichtentechnik eine sehr bedeutende Rolle. Spulen finden wir in Schwingungskreisen, Siebschaltungen, Dämpfungsentzerrern und Laufzeitentzerrern. Übertrager finden wir an sehr vielen Stellen der Übertragungswege zur Anpassung, zur Potentialtrennung.

Dieses Buch soll den Ingenieur der Nachrichtentechnik mit denjenigen Eigenschaften von Spulen und Übertragern bekannt machen, die er braucht, um ihre Bau-daten aus den ihm gestellten Anforderungen vorauszuberechnen.

Der Abschnitt A skizziert die komplexe Permeabilität der *hochpermeablen Kerne*, ihre Komponenten und deren Zusammenhang mit dem Reihen-Ersatzschaltbild, den Kehrwert der komplexen Permeabilität, dessen Komponenten und deren Zusammenhang mit dem Parallel-Ersatzschaltbild. Ohne auf die Herleitung im einzelnen einzugehen, wird dann der Einfluß der Wirbelströme, der Hysterese und der Nachwirkung auf diese Größen beschrieben. Wirbelstrombeiwert, Hysteresebeiwert und Nachwirkungsbeiwert werden neben der Anfangspermeabilität als wichtigste Kennzeichen der hochpermeablen Werkstoffe eingeführt. Darauf wird das Zusammenwirken von Kern und Luftspalt erörtert.

In Abschnitt B werden die gebräuchlichsten Formen der *Spulen mit hochpermeablen Kernen* aufgeführt. Praktische Diagramme zur Berechnung des Gleichstromwiderstandes der Wicklung und ihrer Induktivität werden entwickelt. Die verschiedenen Komponenten des Verlustfaktors, in denen sich Gleichstromwiderstand der Wicklung und Wirbelströme, Hysterese und Nachwirkung des Kernes zeigen, werden in Formeln dargestellt. Es wird gezeigt, wie man die Größe der Wicklungskapazität abschätzen kann.

Der Abschnitt C behandelt den *Frequenzgang der Übertrager*, und zwar zuerst der Anpassungsübertrager, die zwischen zwei ohmschen Widerständen eingeschaltet werden, dann den der Resonanzübertrager für schmale und für breite Frequenzbänder, die in den Gitterkreisen von Verstärkerröhren liegen.

Den Schluß des Buches bilden Hinweise auf die Be-messung der Transformatoren und der Glättungsdrosseln der Netzgeräte.

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART

Postscheckkonto Stuttgart 64383

ARCHIV DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG (A.E.Ü.)

Unter Mitarbeit von H. Busch, R. Feldtkeller, E. Hözlner, K. Hoffmann, O. Kirchner, E. Kramar, A. Mehlis, W. Nestel, H. Piloty, L. Pungs, F. Schröter, W. O. Schumann, M. Seddig, A. Siemens, R. Tamm, F. Tank, R. Theile, R. Vieweg, G. Wuckel

Begründet von KARL WILLY WAGNER

Schriftleitung: J. Piesch, J. Schunack, M. Strutt, A. Thoma / Geschäftsführende Redaktion: F. Rühmann
S. HIRZEL VERLAG, Stuttgart

Band 15

Oktober 1961

Heft 10

Die Messung von Frequenzgängen mit Hilfe der Kreuzkorrelationsbeziehung

von GERHARD SCHWEIZER

Mitteilung aus dem Institut für elektrische Anlagen der Technischen Hochschule Stuttgart

(A.E.Ü. 15 [1961], 437–443; eingegangen am 14. Juli 1961)

DK 621.317.616

Die Messung des Frequenzganges eines Systems mit Hilfe der Kreuzkorrelationsmethode gewinnt seit einigen Jahren zunehmend an Bedeutung. In dieser Arbeit werden zwei Meßmethoden, die für die praktische Ausführung der Messung wichtig sind, beschrieben. Dabei werden als Eingangssignal in dem einen Fall ein sinusförmiges Signal, in dem zweiten Fall ein stochastisches Telegraphensignal verwendet. Die Kreuzkorrelationsmethoden haben sich bei Frequenzgangmessungen als sehr zuverlässig erwiesen, da der Einfluß der Störsignale klein gehalten wird. Die Störsignale werden durch Integrationsprozesse herausgefiltert. Die Ausfilterung ist immer von der Integrationszeit abhängig. Die in Abhängigkeit von der Meßdauer auftretenden unvermeidlichen Fehler werden ausführlich behandelt und leicht zu handhabende Kriterien aufgestellt, um die im Einzelfall notwendige Meßzeit zu ermitteln.

The measurement of the transfer function of a system by means of the cross-correlation method has been gaining increasing importance for several years. Two methods, which are important for the performance of the measurement, are described here. With the first method a sinusoidal signal is applied as an artificial stimulus at the input, and with the second a random telegraph-signal. The cross-correlation method has proven very reliable since a good signal-to-noise ratio is obtained. The noise is filtered out by integration processes. The filtering action depends on the integration time. The unavoidable errors resultant as a function of the observation time are treated in detail. Criteria are developed for determining the necessary duration of the measurement in each case.

1. Einführung

Bei der Messung des Frequenzganges eines Systems nach der herkömmlichen Methode, bei der dem System eine sinusförmige Eingangsgröße aufgeprägt und die Amplitude und Phase der Ein- und Ausgangsschwingung miteinander verglichen werden, treten infolge der unerwünschten regellosen einwirkenden Störgrößen zuweilen Schwierigkeiten auf. Daher ist es oft nicht möglich, die Antwort eines Systems auf eine bestimmte, im allgemeinen sinusförmige Eingangsgröße hin, mit genügender Genauigkeit zu bestimmen. Die Bestimmung von Frequenzgängen mit statistischen Methoden gewinnt deshalb immer mehr an Bedeutung. Die Messung des Frequenzganges mit Hilfe des im System selbst auftretenden weißen Rauschens kann oft infolge weiterer daneben noch vorkommender Störsignale sehr unzuverlässig werden. Zur Frequenzgangmessung wird aus diesem Grunde vorwiegend die Kreuzkorrelationsmethode verwendet, bei der man ein definiertes Eingangssignal dem System aufprägt. Derartige Meßanordnungen sind in [1], [2] ziemlich ausführlich beschrieben. Die folgenden Ausführungen befassen sich vor allem mit der Bestimmung

der systematischen, mit der Messung verbundenen Fehler. Die Kenntnis der unvermeidlich auftretenden Fehler ist bei der Durchführung von Frequenzgangmessungen wichtig.

2. Der Zusammenhang des Frequenzganges und der Kreuzkorrelationsfunktion von Eingang und Ausgang eines Systems

Auf das System in Bild 1 wirken neben dem sinusförmigen Eingangssignal mit der Amplitude A weitere regellose Störsignale ein. Das Ausgangssignal setzt sich daher aus einer Linearkombination der Wirkungen aller Eingangssignale zusammen:

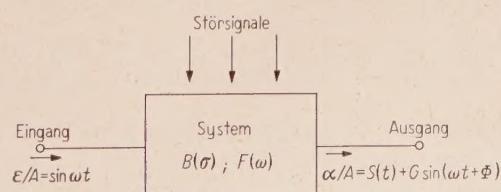


Bild 1. Blockschaltbild für ein System, dessen Frequenzgang mit Hilfe der Kreuzkorrelationsbeziehung gemessen werden soll.

$$f(t) = S(t) + G(\omega) A \sin(\omega t + \Phi). \quad (1)$$

Hierbei sind $G(\omega)$ die Verstärkung des Systems,

Φ die Phase,

$S(t)$ die Ausgangsgröße infolge der regellosen Eingangssignale.

Die regellosen Eingangssignale können bei der Untersuchung durch stochastisch verteilte δ -Funktionen dargestellt werden [3]. Der Elektronenstrom in Vakuumröhren ist beispielsweise nur im Mittel konstant, ändert sich aber zeitlich willkürlich um diesen Mittelwert. Jedes Elektron kann als Einheitsimpuls, der auf das System einwirkt, angesehen werden. Ähnliche Betrachtungen gelten bezüglich der Kernspaltung bei Atomreaktoren [4], bei der Dampfblasenbildung in Kesseln [15] und bei vielen chemischen Prozessen. Die stochastische Ausgangsgröße $S(t)$ kann daher durch Gl. (2) dargestellt werden:

$$S(t) = \sum_{k=1}^n B(t - t_k). \quad (2)$$

In Gl. (2) bedeuten

$B(t)$ die Gewichtsfunktion, die als Antwort des Systems auf einen Einheitsimpuls hin definiert ist,

t_k die stochastisch verteilte Verschiebungszeit.

RICE hat in [3] gezeigt, daß die regellose Ausgangsgröße eine Gaußsche Verteilung besitzt, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß $S(t)$ zwischen $S(t)$ und $S(t) + dS(t)$ liegt, ist $p \cdot dS(t)$, wobei die Wahrscheinlichkeit p durch die bekannte Beziehung

$$p_p = \frac{1}{\sigma \sqrt{2 \pi}} e^{-\frac{[(S(t_p) - \bar{S}(t))^2]}{2 \sigma^2}} \quad (3)$$

ausgedrückt wird. In Gl. (3) bedeuten

$\bar{S}(t)$ den über ein unendlich langes Zeitintervall genommenen Mittelwert,

σ die Streuung.

Aus Gl. (3) sieht man, daß alle statischen Eigenschaften von $S(t)$ durch die zwei Größen $\bar{S}(t)$ und σ bestimmt werden.

Wenn man Eingang und Ausgang des Systems nach Bild 1 miteinander korreliert, erhält man die Kreuzkorrelationsfunktion

$$\begin{aligned} \Phi_{ea} &= \frac{1}{T} \int_0^T [S(t) + G \sin(\omega t + \Phi)] \sin \omega(t + \tau) dt = \\ &= \frac{1}{T} \left[\int_0^T S(t) \sin \omega(t + \tau) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T G \sin(\omega t + \Phi) \sin \omega(t + \tau) dt \right], \end{aligned} \quad (4)$$

wobei τ die Verschiebungsvariable ist.

Wenn man in Gl. (4) das Integral von 0 bis ∞ erstreckt, geht der erste Ausdruck gegen Null, da $S(t)$ und $\sin(\omega t + \tau)$ nicht miteinander korrelieren. Damit findet man für die Kreuzkorrelationsfunktion

$$\Phi_{ea} = \frac{1}{T} \left\{ \int_0^T G \sin(\omega t + \Phi) \sin[\omega(t + \tau)] dt \right\}. \quad (5)$$

Wenn man Gl. (5) für zwei Werte $\tau = \tau_1$ und $\tau_2 = \tau_1 + \pi/2$ auswertet und beide Werte addiert, findet man

$$\begin{aligned} \Phi_{ea}(\tau_1) + \Phi_{ea}(\tau_1 + \frac{\pi}{2}) &= \\ &= G \cos(\omega \tau_1 - \Phi) - G \sin(\omega \tau_1 - \Phi), \end{aligned} \quad (6a)$$

für $\tau_1 = 0$ ergibt sich

$$\Phi_{ea}(0) + \Phi_{ea}\left(\frac{\pi}{2}\right) = G \cos \Phi + G \sin \Phi. \quad (6b)$$

Man sieht aus Gl. (6b), daß man bei sinusförmiger Erregung eines Systems den Real- und Imaginärteil des Frequenzganges für eine bestimmte Frequenz dadurch erhält, daß man den Ausgang mit der Eingangsschwingung bzw. mit der um $\pi/2$ verschobenen Eingangsschwingung am einfachsten mit dem sin und cos des Eingangs multipliziert [1], [2] und integriert. Das stimmt aber nur dann genau, wenn der erste Ausdruck in Gl. (4) vernachlässigt werden kann, d. h., wenn über unendlich lange Zeit hinweg integriert wird, was bei der praktischen Ausführung nicht der Fall ist. Im Abschnitt 3 wird versucht, Beziehungen für den zu erwartenden, auftretenden Fehler bei endlicher Meßdauer in Abhängigkeit von der Meßlänge abzuleiten.

3. Der Meßfehler in Abhängigkeit von der Meßdauer

Die Funktion $S(t)$ besitzt eine Gaußsche Verteilung. Bei der Frequenzgangmessung wird die Funktion

$$C(t) = S(t) \sin[\omega(t + \tau)] \quad (7)$$

nur über eine endliche Zeit gemittelt. Der infolge dieser endlichen Meßlänge auftretende Fehler wird durch das mittlere Fehlerquadrat bestimmt: (8a)

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle [S(t) \sin[\omega(t + \tau)] - \bar{S}(t) \sin[\omega(t + \tau)]]^2 \rangle = \\ &= \langle \{S(t) \sin[\omega(t + \tau)]\}^2 \rangle - \langle \bar{S}(t) \sin[\omega(t + \tau)] \rangle^2. \end{aligned}$$

Das Symbol $\langle \rangle$ soll eine Mittelwertsbildung anzeigen.

Da in dem vorliegenden Fall der zeitliche Mittelwert identisch gleich Null ist, ergibt sich für das mittlere Fehlerquadrat

$$\sigma^2 = \langle \{S(t) \sin[\omega(t + \tau)]\}^2 \rangle. \quad (8b)$$

Die Größe $S(t)$ ist eine stochastische Funktion, die durch Gl. (2) definiert ist. Gl. (2) stellt das Ensemble¹ der Wirkungen aller vorkommenden auf das System einwirkenden Störsignale, die als δ -Funktionen gedeutet werden können, dar:

$$\begin{aligned} E[B(t)] &= B(t) + B(t - t_1) + B(t - t_2) + \dots = \\ &= E[B(t - t_k)]. \end{aligned} \quad (9)$$

¹ Der englische Ausdruck „Ensemble“ ist hier direkt übernommen worden. Darunter soll die Gesamtheit aller Werte, die die betreffende statistische Variable annehmen kann, verstanden werden [6].

Die Werte t_k in Gl. (9) sind stochastisch verteilt. Mit Gl. (9) kann man Gl. (8) in der Form

$$\sigma^2 = \langle E[B(t)] \sin[\omega(t + t_k)]^2 \rangle = \quad (10)$$

$$= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T E[B(t_1)] \sin[\omega(t_1 + \tau)] \times$$

$$\times E[B(t_2)] \sin[\omega(t_2 + \tau)] dt_1 dt_2 \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{1}{A^2 T / \Theta} \left[\frac{1}{1 + \omega^2 \Theta^2} + \frac{e^{-T/\Theta}}{1 + \omega^2 \Theta^2} (\omega \Theta \sin \omega T - \cos \omega T) \right]}.$$

ausdrücken. Der Integrand von Gl. (10) hat eine mehrdimensionale Gaußsche Verteilung. Da die beiden Ensemble $E[B(t_1)]$ und $E[B(t_2)]$ statistisch unabhängig sind, kann die gemeinsame Verteilung durch die Beziehung [7]

$$E[B(t_1)] E[B(t_2)] = E[B(t_1) B(t_2)] = \Phi(t_1 - t_2)$$

ausgedrückt werden. Damit, und unter der gültigen Annahme, daß $S(t)$ und $\sin \omega(t + \tau)$ nicht korrelieren, ergibt sich aus Gl. (10) unter Berücksichtigung von [7] die Beziehung

$$\sigma^2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \Phi(t_1 - t_2) \cos \omega(t_1 - t_2) dt_1 dt_2. \quad (11)$$

Hierbei ist $\Phi(t_1 - t_2)$ die Autokorrelationsfunktion der Gewichtsfunktion des Systems, die definiert ist als

$$\Phi(t_1 - t_2) = \Phi(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T B(t) B(t + \tau) dt, \quad (12)$$

wobei $\tau = t_1 - t_2$ ist.

Mit der Substitution $\tau = t_1 - t_2$ ergibt sich aus Gl. (11)

$$\sigma^2(T) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^{T-\tau} \Phi(\tau) \cos \omega \tau d\tau dt_1.$$

Die Integration über t_1 kann nun ausgeführt werden. Man erhält dann

$$\sigma^2(T) = \frac{1}{T^2} \int_0^T (T - \tau) \Phi(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (13)$$

Hierbei ist T die Meßdauer. Der Fehler σ , der in Gl. (13) definiert ist, wird jetzt auf das mittlere Verhältnis von Geräusch und Signal am Ausgang bezogen. Die mittlere Amplitude kann unter Beachtung der Gl. (2) folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\langle S_A(t) \rangle^2 = \frac{1}{T^2} \int_0^\infty B^2(t) dt = \Phi(0).$$

Man kann jetzt den auf die Ausgangsamplitude und die mittlere Geräuschamplitude bezogenen Fehler definieren:

$$\varepsilon = \frac{1}{TA} \sqrt{\int_0^T (T - \tau) \frac{\Phi(\tau)}{\Phi(0)} \cos \omega \tau d\tau} = \frac{\sigma}{A\sqrt{\Phi(0)}}. \quad (14)$$

An einem einfachen Beispiel soll gezeigt werden, wie man mit Hilfe der Gl. (14) den Meßfehler in Abhängigkeit von der Meßdauer bestimmt. Der Frequenzgang eines einfachen Systems, das durch ein Verzögerungsglied angenähert werden kann, soll bestimmt werden. Die Gewichtsfunktion dieses Systems heißt

$$B(t) = \frac{1}{\Theta} e^{-t/\Theta}.$$

Daraus findet man die Autokorrelationsfunktion

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{\Theta} e^{-|\tau|/\Theta}.$$

Damit ergibt sich aus Gl. (14)

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{A^2 T / \Theta} \left[\frac{1}{1 + \omega^2 \Theta^2} + \frac{e^{-T/\Theta}}{1 + \omega^2 \Theta^2} (\omega \Theta \sin \omega T - \cos \omega T) \right]}. \quad (15)$$

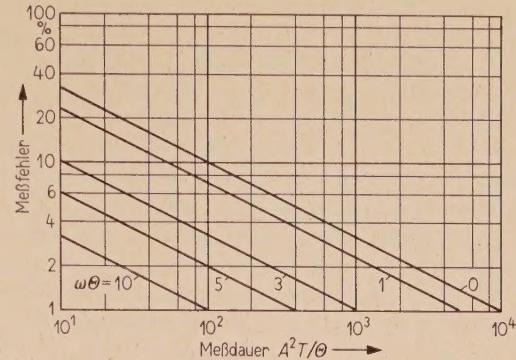


Bild 2. Darstellung des Meßfehlers als Funktion der normierten Meßdauer bei einem Verzögerungsglied.

Gl. (15) ist in Bild 2 mit $\omega \Theta$ als Parameter aufgetragen. Man sieht, daß der zweite Ausdruck praktisch keinen Einfluß hat. Der Meßfehler infolge der endlichen Meßdauer kann immer mit Hilfe von Gl. (14) bestimmt werden. Die Anwendung der Gl. (14) setzt die Kenntnis des zu messenden, im allgemeinen unbekannten Systems voraus, da zur Bestimmung des Fehlers die Korrelationsfunktion bekannt sein muß. Die Schwierigkeit kann nur umgangen werden, wenn man zuerst die Frequenzgangmessung durchführt und daran anschließend prüft, welchen Fehler das Meßergebnis vermutlich aufweist. Im allgemeinen werden aber die Eigenschaften des zu messenden Systems so weit bekannt sein, daß man vor Beginn der Messung die Meßdauer ungefähr bestimmen kann.

Die Berechnung und die Auswertung der Gl. (14) ist im allgemeinen umständlich, da die Autokorrelationsfunktion für die verschiedensten Gewichtsfunktionen nicht tabelliert sind, und die Berechnung infolge der notwendigen Bestimmung des Integrals oft recht umfangreich wird. Die wenigstens näherungsweise Berechnung der Gl. (14) kann vereinfacht werden, wenn man Gl. (14) in die Frequenzebene transformiert. Dazu wird die Funktion $T - \tau$, die in Gl. (14) auftritt, wie folgt definiert:

$$g(T - \tau) = T - \tau \quad \text{für } 0 < \tau \leq T, \\ g(t - \tau) = 0 \quad \text{für } T < \tau \leq \infty. \quad (16)$$

Mit der Definition von Gl. (16) kann man die Integrationsgrenzen von Gl. (13) von 0 bis ∞ ausdehnen:

$$\sigma^2 = \frac{1}{T^2} \int_0^\infty g(t - \tau) \Phi(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (17)$$

Die Autokorrelationsfunktion ist immer eine gerade Funktion [7]. Infolgedessen kann man Gl. (17) in der Form

$$\sigma^2 = \frac{1}{T^2} \int_0^\infty g(T-\tau) \Phi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (18)$$

ausdrücken. Wenn man die Faltungseigenschaften der Fourier-Transformation berücksichtigt [8], erhält man

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{T^2} \int_0^\infty g(T-\tau) \Phi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi T^2} \int_0^\infty P(\omega') G(\omega - \omega') d\omega' = \quad (19) \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^\infty P(\omega') G(\omega - \omega') df' \end{aligned}$$

mit $2\pi f' = \omega'$. Hierbei ist $P(\omega)$ die Fourier-Transformation der Autokorrelationsfunktion $\Phi(\tau)$, die als Leistungsspektrum definiert ist. $G(\omega)$ ist die Fourier-Transformation der Funktion $g(T-\tau)$ von Gl. (16). Für die Fourier-Transformation der Funktion $g(T-\tau)$ ergibt sich das Leistungsspektrum [9]

$$G(\omega) = \int_0^\infty g(T-\tau) d\tau e^{-j\omega\tau} = T^2 \left(\frac{\sin T \pi f}{\pi f T} \right)^2. \quad (20)$$

Der Betrag des Verlaufs dieses Leistungsspektrums ist in Bild 3 dargestellt. Man sieht aus Bild 3, daß dieses Spektrum die Eigenschaften eines scharfen Filters hat. Man kann daher die Funktion $G(\omega)$ durch eine δ -Funktion ersetzen. Die δ -Funktion ist als Impulsfunktion mit der Fläche eins definiert. Die Funktion $G(\omega)$ schließt eine Fläche von

$$F = \int_0^\infty T^2 \left(\frac{\sin \omega T}{\omega T} \right)^2 df = T \quad (21)$$

ein. $G(\omega)$ wird daher als δ -Funktion mit der Amplitude T angenähert. Mit dieser Näherung findet man aus Gl. (19), wenn man die Ausblendeigenschaften der δ -Funktion berücksichtigt,

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} P(\omega). \quad (22)$$

Der Fehler σ wird, wie vorhergehend gezeigt, wieder auf die mittlere Geräuschanplitude bezogen, die durch die Größe $\Phi(0)$ bestimmt ist. $\Phi(0)$ kann ebenfalls durch das Frequenzspektrum ausgedrückt werden. Bei der inversen Fourier-Transformation gilt allgemein [8]

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega,$$

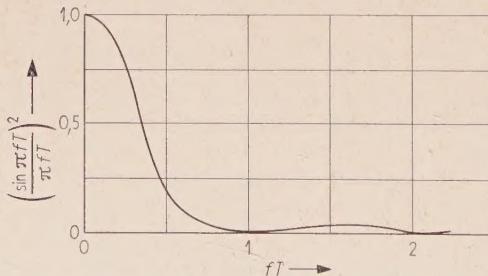


Bild 3. Verlauf der Funktion $\left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2$.

für $\tau = 0$ ergibt sich unter der Berücksichtigung von $\omega = 2\pi f$ das Integral, das die Größe $\Phi(0)$ bestimmt:

$$\Phi(0) = \int_0^\infty P(\omega) df.$$

Für den auf die Signal- und die mittlere Geräuschanplitude bezogenen Fehler findet man jetzt Gl. (23). Alle Zeitfunktionen sind hier durch die entsprechenden Frequenzfunktionen ersetzt:

$$\varepsilon = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^\infty P(\omega) df}. \quad (23)$$

Hierbei ist $P(\omega)$ das Quadrat des Betrages des Frequenzganges oder das Leistungsspektrum, das über die Fourier-Transformation mit der Autokorrelationsfunktion verknüpft ist. Mit Gl. (23) kann ebenfalls der Fehler in Abhängigkeit von der Meßdauer und dem zu messenden System bestimmt werden. Da man üblicherweise mit der Behandlung von Frequenzfunktionen mehr vertraut ist, wird die Gl. (23) zur Ermittlung der erforderlichen Meßdauer im allgemeinen zweckmäßiger sein als Gl. (14). Das Integral $\int_0^\infty P(\omega) df$ ist für viele praktisch vorkommende Funktionen $P(\omega)$ tabelliert [10]. Es soll noch einmal darauf hingewiesen werden, daß zur Auswertung von Gl. (23) das Leistungsspektrum bekannt sein muß. Der gemachte Meßfehler kann daher immer erst im Anschluß an eine Messung ermittelt werden. Meistens wird aber das System soweit im voraus bekannt sein, daß man die notwendige Meßdauer vor der Messung wenigstens ungefähr berechnen kann.

Wenn man mit Gl. (23) ebenfalls den Fehler für das einfache System, das durch ein Verzögerungsglied dargestellt werden kann, bestimmt, findet man

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{A^2 T/\Theta} \frac{1}{1 + \Theta^2 \omega^2}}. \quad (24)$$

Man sieht aus Gl. (24), daß bei der näherungsweisen Bestimmung des Fehlers mit Hilfe von Gl. (23) der zweite Ausdruck von Gl. (15) vernachlässigt wird. Wie vorhergehend gezeigt, ist diese Größe vernachlässigbar klein. Man sieht daraus, daß die Näherungsgleichung (24) zur Bestimmung des Meßfehlers sehr gute Ergebnisse liefert.

4. Die Streuung des Fehlers bei der Messung des Frequenzganges

Wenn man sich die Messung des Frequenzganges oft wiederholt denkt, stellt sich die Frage, wie sehr der tatsächliche, jeweilige auftretende Fehler streut, d. h., wie sehr man sich auf den Wert der aus Gl. (14) bzw. (23) berechnet wurde, verlassen kann. Dieser Wert für den Fehler wurde aus dem mittleren Fehlerquadrat bestimmt. Die willkürlichen, bei einer Reihe von Versuchen auftretenden Fehler werden eine χ^2 -Verteilung haben [8]. Die Zahl der Freiheitsgrade ist durch

$$\frac{k}{2} = \frac{\text{Streuung}}{\text{Mittelwert}} \quad (25)$$

bestimmt [9]. Die Streuung des Fehlers σ^2 kann auf genau die gleiche Weise wie σ^2 selbst berechnet werden. Mit Hilfe von Gl. (10) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \langle(\sigma^2)^2\rangle &= \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T E[B(t_1)] E[B(t_2)] \times \\ &\quad \times E[B(t'_1)] E[B(t'_2)] \sin \omega(t_1 + \tau) \sin \omega(t_2 + \tau) \times \\ &\quad \times \sin \omega(t'_1 + \tau) \sin \omega(t'_2 + \tau) dt_1 dt_2 dt'_1 dt'_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Gl. (26) besitzt eine vierdimensionale Verteilung. Unter Berücksichtigung der Gesetze über mehrdimensionale Verteilungen und mit Hilfe einer, wie in Gl. (16) definierten Funktion $g(t)$ findet man aus Gl. (26) die Beziehung [11]

$$\begin{aligned} \langle(\sigma^2)^2\rangle &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty g(t'_1) g(t'_2) g(t_1) g(t_2) \times \\ &\quad \times \Phi(t_1 - t'_1) \Phi(t_2 - t'_2) e^{-j\omega(t_1 - t'_1)} e^{-j\omega(t_2 - t'_2)} \times \\ &\quad \times dt_1 dt_2 dt'_1 dt'_2 + 2 \langle\sigma^2\rangle^2. \end{aligned} \quad (27)$$

$\langle\sigma^2\rangle^2$ ist hierbei der arithmetische Mittelwert des nach Gl. (13) berechneten Fehlers.

Man kann nun Gl. (27) in Gl. (25) einführen und erhält dann, wenn man für die Autokorrelationsfunktion wieder die Frequenzbeziehungen einführt, die Gleichung [3], [11]

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} &= 1 + \langle\sigma^2\rangle^{-2} \times \\ &\quad \times \left\{ \int_0^\infty P(\omega') [G(\omega + \omega') + G(\omega - \omega')] d\omega' \right\}^2. \end{aligned} \quad (28)$$

In [11] wird gezeigt, daß der letzte Ausdruck in Gl. (28) klein gegen eins ist. Damit ergibt sich für den Wert von k näherungsweise $k = 2$. Aus den Tabellen der χ^2 -Verteilung kann man daraus die entsprechende Wahrscheinlichkeit entnehmen, daß der nach Gl. (14) bzw. (23) berechnete Fehler nicht mit einem zu großen Unsicherheitsgrad behaftet ist. Wenn man für den nach Gl. (14) bzw. (23) berechneten Fehler eine Unsicherheit von $\pm 100\%$ zuläßt, so findet man aus den Tabellen für die χ^2 -Verteilung [12], daß die Wahrscheinlichkeit, daß der tatsächlich auftretende Fehler außerhalb dieser Schranke liegt, etwa 10 % ist.

5. Die praktische Messung des Frequenzganges mit der Kreuzkorrelationsmethode

Die Auswertung der Gl. (5) und (6) zur Bestimmung des Frequenzganges eines Systems kann digital oder analog geschehen. Bei der digitalen Auswertung wird die Ausgangsgröße des Systems, die durch Gl. (1) dargestellt ist, aufgenommen. Man erhält die Kreuzkorrelationsfunktion, indem man die diskreten Werte des Ausgangs

$$y_n = S_n + A \sin(n\alpha + \Phi), \quad n = 1, 2, \dots, m$$

mit

$$x = \sin \alpha(n + \nu)$$

multipliziert und alle möglichen Produkte aufsummiert [5]:

$$\Phi_{ea} = \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^M y_n \sin(n + \nu)\alpha. \quad (29)$$

Zur Bestimmung des Realteils und des Imaginärteils des Frequenzganges für einen Punkt genügt es, wie in Gl. (6) gesagt, wenn man ν auf zwei Werte 0 und $\pi/2$ beschränkt. Um den Meßfehler, der durch Gl. (14) bzw. (23) bestimmt ist, klein zu halten, muß man meistens über eine ziemlich lange Zeit messen, d. h., man braucht sehr viele diskrete Meßpunkte. Die Berechnung kann daher nur mit einem Digitalrechner erfolgen. Sofern kein Analog-Digital-Umwandler zur Verfügung steht, ist die Auswertung sehr mühsam, und außerdem ist es nahezu unvermeidlich, daß man beim Auswerten des Meßstreifens mit dem der Ausgang des Systems aufgenommen wird, eine Anzahl Fehler macht.

Daher scheint es vorteilhafter und zeitsparender, die Gl. (6) zur Bestimmung des Frequenzganges analog auszuwerten. Das kann mit Hilfe von besonderen Geräten [1] oder am einfachsten mit einem kleinen Analogrechner geschehen [2], wie in Bild 4 gezeigt. Die Genauigkeit hängt natürlich von der Güte der Rechenelemente des Analogrechners ab, ist aber meistens sehr gut [2].

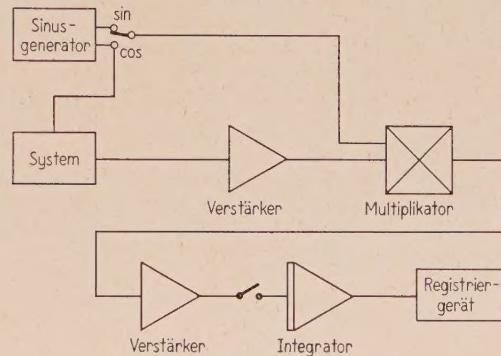


Bild 4. Mebanordnung für die Messung des Frequenzganges mit der Kreuzkorrelationsmethode auf analogem Wege.

6. Die Messung des Frequenzganges bei stochastischer Eingangsgröße

Die digitale wie auch die analoge Auswertung nimmt bei der Methode, bei der das System durch eine sinusförmige Eingangsgröße erregt wird, sehr viel Zeit für die Messung in Anspruch, da jeder einzelne Punkt des Frequenzganges getrennt gemessen werden muß. In manchen Fällen kann es daher vorkommen, daß sich das System selbst in der Zwischenzeit ändert, und die Messung dadurch unmöglich gemacht wird. Diese Schwierigkeit kann man umgehen, wenn man den Eingang des Systems mit weißem Rauschen erregt. Da das weiße Rauschen

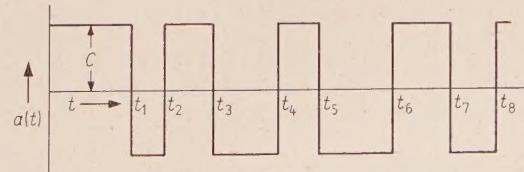


Bild 5. Zeitlicher Verlauf eines stochastischen Telegraphen-signal.

alle gewünschten Frequenzen enthält, genügt eine einzige Messung zur Bestimmung des gesamten Frequenzganges. Aus noch zu erwähnenden Gründen verwendet man am vorteilhaftesten ein stochastisches Telegraphensignal, wie es Bild 5 zeigt [13].

Wenn das System von Bild 1 mit einem stochastischen Telegraphensignal erregt wird, wird die Ausgangsfunktion durch die Gleichung

$$f(t) = S(t) + \int_0^\infty B(\lambda) a(t - \lambda) d\lambda \quad (30)$$

bestimmt. Hierin sind $a(t)$ das Telegraphensignal, $B(\lambda)$ die Gewichtsfunktion des Systems und $S(t)$ die Geräuschsignale. Die Kreuzkorrelationsfunktion zwischen Eingang und Ausgang heißt, wenn man zunächst den Einfluß der Geräuschsignale vernachlässigt, die mit dem stochastischen Eingangstelegraphensignal nicht korrelieren,

$$\Phi_{ea}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^\infty \int_0^\infty B(\lambda) a(t - \lambda) d\lambda a(t - \tau) dt. \quad (31)$$

Die Gewichtsfunktion $B(\lambda)$ kann vor ein Integral gezogen werden, da sie nicht von t abhängt. Damit findet man

$$\Phi_{ea}(\tau) = \int_0^\infty B(\lambda) \left[\frac{1}{T} \int_0^\infty a(t - \lambda) a(t - \tau) dt \right] d\lambda.$$

Der zweite Integralausdruck ist definitionsgemäß die Autokorrelationsfunktion des stochastischen Telegraphensignals. Für die Kreuzkorrelationsfunktion ergibt sich damit

$$\Phi_{ea}(\tau) = \int_0^\infty B(\lambda) \Phi(\tau - \lambda) d\lambda. \quad (32)$$

Hierbei ist $\Phi(\tau - \lambda)$ die Autokorrelationsfunktion des stochastischen Telegraphensignals, die durch die Gleichung

$$\Phi(\tau) = C^2 e^{-2b(\tau)} \quad (33)$$

definiert ist [14]. C ist die Amplitude des Telegraphensignals, b ist die Zahl der mittleren Nulldurchgänge. Da die Zahl der mittleren Nulldurchgänge groß sein muß, verglichen mit der höchsten Frequenz, deren Amplitude und Phase bei der Frequenzgangmessung noch gemessen werden soll, kann man die Autokorrelationsfunktion durch eine δ -Funktion annähern. Die Amplitude der δ -Funktion erhält man durch die Mittelwertbildung von Gl. (33) von 0 bis ∞ . Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi(\tau - \lambda) &\approx C^2 \int_0^\infty e^{-2b(\tau - \lambda)} d(\tau - \lambda) = \\ &= \left| \frac{C^2}{2b} \right| \delta(\tau - \lambda). \end{aligned} \quad (34)$$

Gl. (34) kann nun in Gl. (32) eingesetzt werden. Wenn man die Filtereigenschaften der δ -Funktion berücksichtigt, findet man

$$\Phi_{ea}(\tau) = \frac{C^2}{2b} \int_0^\infty B(\lambda) \delta(\tau - \lambda) d\lambda = \frac{C^2}{2b} B(\tau). \quad (35)$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion ist also der Gewichtsfunktion direkt proportional und muß nicht erst aus dieser durch eine Integraltransformation berechnet werden. Mit einem graphischen Verfahren oder durch eine mit einem Rechner durchgeführte Integraltransformation ergibt sich ohne Schwierigkeiten der Frequenzgang. Die Kreuzkorrelationsfunktion kann digital oder analog berechnet werden. Die digitale Auswertung mit einer Digitalrechenmaschine macht keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Man muß aber darauf achten, daß man zur Bestimmung der Kreuzkorrelationsfunktion eine genügende Anzahl von Punkten heranzieht, da sonst große Fehler auftreten können. Die Übertragung dieser Punkte von dem Meßstreifen in den Rechner ist ohne direkten Analog-Digital-Umsetzer mühsam. Daneben besteht noch die Gefahr, daß eine Anzahl Übertragungsfehler gemacht wird, die die Genauigkeit beeinträchtigen. Die meist sehr umständliche analoge Berechnung der Korrelationsfunktion ist in diesem Fall besonders einfach. Wenn man die Nulldurchgänge des stochastischen Telegraphensignals z. B. auf einen Lochstreifen stanzt und eine Anzahl solcher Lochstreifen, die entsprechend zeitlich verschoben sind, photoelektrisch abtastet, erhält man das zur Berechnung der Kreuzkorrelation zeitverschobene Eingangssignal $a(t - \tau_v)$ für diskrete Werte von τ_v . Die Multiplikationen, die bei der Auswertung des Integrals

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) a(t - \tau_v) dt$$

notwendig sind, werden in diesem Fall sehr einfach, da das Telegraphensignal nur die zwei Werte $\pm C$ annehmen kann. Daher muß man bei der Multiplikation nur das Vorzeichen des Ausgangssignals entsprechend dem zeitverschobenen Eingangssignal $a(t - \tau_v)$ umkehren, was mit einem gesteuerten Relais gemacht werden kann. An Stelle eines Lochstreifens kann man ebenso ein Magnetband verwenden [16]. Dieses so erhaltene Signal wird über die notwendige Meßdauer hinweg integriert. Man erhält damit einen Wert der Kreuzkorrelationsfunktion, der einen Wert der Gewichtsfunktion $B(\tau)$ darstellt:

$$\Phi_{ea}(\tau_v) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) C \operatorname{sign} a(t - \tau_v) dt \approx B(\tau_v). \quad (36)$$

Wenn man, wie schon angedeutet, eine Anzahl solcher Lochstreifen gleichzeitig verwendet, erhält man mit einer Messung eine entsprechende Anzahl von diskreten Werten der Gewichtsfunktion. Zur Zeit wird in dem National Laboratory Los Alamos ein Gerät zur Bestimmung der Gewichtsfunktion eines Systems mit 10 Spuren gebaut.

7. Die Ermittlung des auftretenden Fehlers bei der Messung des Frequenzganges mit einer stochastischen Eingangsgröße

Da die Messung sich immer nur über einen endlichen Zeitraum hinweg erstreckt, muß der Einfluß der Geräuschsignale auf die Genauigkeit des Ergebnis-

nisses berücksichtigt werden. Die über einen endlichen Zeitraum hinweg ermittelte Kreuzkorrelationsfunktion wird nicht identisch gleich Null, sondern nimmt einen endlichen Wert an, der in Abhängigkeit von der Meßdauer jetzt berechnet werden soll. Gl. (37) bestimmt die Kreuzkorrelationsfunktion zwischen dem stochastischen Eingangssignal und dem Störsignal des Ausgangs:

$$\Phi_{ea}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) a(t - \tau) dt. \quad (37)$$

Die Streuung findet man mit dem mittleren Fehlerquadrat. Wenn man voraussetzt, daß die beiden Signale nicht miteinander korrelieren und die Gesetze über mehrdimensionale Verteilungen beachtet, ergibt sich

$$\sigma^2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \Phi_{Syst.}(t_2 - t_1) \Phi_{Tel.S.}(t_2 - t_1) dt_1 dt_2. \quad (38)$$

Hierbei ist $\Phi_{Syst.}(t_2 - t_1)$ die Autokorrelationsfunktion der Gewichtsfunktion des Systems, $\Phi_{Tel.S.}(t_2 - t_1)$ die Autokorrelationsfunktion des Telegraphensignals.

Wenn man in Gl. (38) die Substitution $\tau = t_2 - t_1$ einführt, ergibt sich nach der Integration über eine Variable

$$\sigma^2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T (T - \tau) \Phi_{Syst.}(\tau) \Phi_{Tel.S.}(\tau) d\tau. \quad (39)$$

Um die Auswertung der Gl. (39) zu vereinfachen, werden die Autokorrelationsfunktionen durch die Fourier-Integrale ersetzt. Mit

$$\begin{aligned} \Phi_{Syst.}(\tau) &= \int_0^\infty P(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \\ \Phi_{Tel.S.}(\tau) &= \int_0^\infty H(\omega) \cos \omega \tau d\omega \end{aligned}$$

geht Gl. (39) in Gl. (40) über:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{T^2} \int_0^\infty H(f_1) \int_0^\infty P(f_2) \left[\frac{\sin^2 \pi(f_1 - f_2) T}{2\pi(f_1 - f_2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin^2 \pi(f_1 + f_2) T}{2\pi(f_1 + f_2)^2} \right] df_1 df_2. \end{aligned} \quad (40)$$

Der Anteil des Ausdrucks von $f_1 + f_2$ ist klein verglichen mit dem von $f_1 - f_2$. Damit ergibt sich aus Gl. (40) näherungsweise Gl. (41), wenn der Ausdruck mit $f_1 - f_2$ durch eine δ -Funktion ersetzt wird:

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_{f_a}^{f_e} H(f_1) P(f_1) df_1. \quad (41)$$

Hierbei ist $H(f_1)$ die spektrale Dichte des stochastischen Eingangssignals, die über den interessierenden, zu messenden Frequenzbereich $f_a \leq f < f_e$ konstant ist. Gl. (41) kann daher wie folgt ausgedrückt werden:

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_{f_a}^{f_e} \frac{C^2}{b} P(f) df \leq \frac{C^2}{T b} P_{\max}(f_e - f_a). \quad (42)$$

Hierbei ist P_{\max} der größte Wert von $P(\omega)$ im Frequenzbereich $f_a \leq f < f_e$ und b die Anzahl der mitt-

leren Nulldurchgänge. Damit ergibt sich der mittlere Meßfehler, der auf die mittlere Geräuschamplitude und die Amplitude des Telegraphensignals bezogen wird:

$$\varepsilon \leq \sqrt{\frac{1}{T} \frac{P_{\max}(f_e - f_a)}{b \int_0^\infty P(\omega) d\omega}}. \quad (43)$$

Der Meßfehler wird im wesentlichen durch die Breite des zur Messung verwendeten Frequenzspektrums bestimmt.

8. Schlußbemerkung

Die Messung des Frequenzganges eines Systems ist mit Hilfe der Kreuzkorrelationsmethode immer durchführbar und im allgemeinen zuverlässiger als mit Hilfe der Autokorrelationsmethode. Die Bestimmung der erforderlichen Meßdauer ist in jedem Fall sehr wichtig. Die hier abgeleiteten Beziehungen (14) und (23) bzw. (43) erlauben eine Abschätzung der notwendigen Meßdauer, auf die, wie im Abschnitt 5 gezeigt wurde, genügend Verlaß ist. Welche Meßmethode nun im einzelnen verwendet wird, hängt von den Gegebenheiten des einzelnen Falles ab. Man kann immer eine digitale oder eine analoge Auswertung der Messungen vornehmen. Im allgemeinen kann jedoch gesagt werden, daß der Aufwand bei der analogen Auswertung geringer ist als bei der digitalen Methode. Wenn kein Analog-Digital-Umsetzer zur Verfügung steht, mit dem die Meßwerte direkt über ein Magnetband einer Digital-Maschine zugeführt werden können, ist die Genauigkeit bei der analogen Auswertung der Meßdaten im allgemeinen nicht schlechter als bei der digitalen Berechnung.

Schrifttum

- [1] SCHÄFER, O., Anwendung der statistischen Betrachtungsweise bei der Untersuchung von Übertragungssystemen. Regelungstechnik 4 [1956], 276–280.
- [2] SCHWEIZER, G., Die Bestimmung des Frequenzganges eines Kernreaktors mit Hilfe von statistischen Methoden. Atomkernergnergie 6 [1961], 18–25.
- [3] RICE, S. O., Mathematical analysis of random noise. Bell Syst. tech. J. 23 [1944], 282.
WAX, N., Selected papers on noise and stochastic processes. Dover Publication, New York 1954.
- [4] THIE, J., Statistical analysis of power reactor noise. Nucleonics 17 [1959], H. 10, 102–111.
- [5] ACKASU, Z. A., Methods of investigating noise power reactors. Argonne Nat. Laboratory, Bericht Nr. 6205, S. 97.
- [6] SCHLITT, H., Systemtheorie für regellose Vorgänge. Springer-Verlag, Berlin 1960.
- [7] LANIN, J. H. und BATTIN, R. H., Random processes in automatic control. McGraw-Hill Book Co., New York 1956.
- [8] SEIFERT, W. und STEEG, C., Control systems engineering. McGraw-Hill Book Co., New York 1960.
- [9] BLACKMANN, R. und TUCKEY, W., The measurement of power spectra. Dover Publications, New York 1960.
- [10] TRUXAL, G., Control engineering handbook. McGraw-Hill Book Co., New York 1960.
- [11] ACKASU, Z. A., Measurements of noise power spectra by Fourier analysis. J. appl. Phys. 32 [1961], 565–568.
- [12] CRAMER, H., The elements of probability theory. J. Wiley & Sons, New York 1958.
- [13] GYFTOPPOULIS, E. P., The use of stochastic inputs to measure the dynamic response of reactor systems. Transact. Amer. Nuclear Soc. 3 [1960], Nr. 2, 476.
- [14] BENDAT, J. S., Principles and applications of random noise theory. J. Wiley & Sons, New York 1958.
- [15] ACKASU, Z. A., Mean square instability of boiling water reactors. Transact. Amer. Nuclear Soc. 3 [1960], Nr. 2, 475–476.
- [16] ANDERSON, ASELTINE, MANCINI und SARTURE, A self adjusting system for optimum dynamic performance. Inst. Radio Engrs. Nat. Conv. Rec., März 1958, 182–190.

Reflexion und Transmission beim Einfall einer H_{0n} -Welle auf einen kegelförmigen Übergang zwischen zwei Hohlleitern

von GERHARD PIEFKE

Mitteilung aus dem Zentral-Laboratorium der Siemens & Halske AG, München

A.E.Ü. 15 [1961], 444–454; eingegangen am 23. Juni 1961

DK 621.372.831

Es werden Formeln abgeleitet zur Berechnung der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten bei dem Einfall einer H_{0n} -Welle auf einen kegelförmigen Übergang zwischen zwei Hohlleitern. Insbesondere wird der Reflexionskoeffizient bis zu einem Öffnungswinkel von 60° in Kurven dargestellt, wenn eine H_{01} -Welle einfällt und nur diese im ankommenden Hohlleiter existenzfähig ist. Der Betrag des Reflexionskoeffizienten nimmt mit wachsender Frequenz ab und mit wachsendem Öffnungswinkel des Kegels zu. So hat z. B. bei einer Frequenz, die gleich der 1,2-fachen Grenzfrequenz ist, der Betrag des Reflexionskoeffizienten für einen Öffnungswinkel von 36° den Wert 0,031, für einen Öffnungswinkel von 60° den Wert 0,084. Ein unendlich langes kegelförmiges Horn ist für den ankommenden Hohlleiter ein Abschlußwiderstand, bestehend aus realem Widerstand mit parallel geschalteter Induktivität. Für die Transmissionskoeffizienten werden unter der Voraussetzung eines kleinen Öffnungswinkels des Kegels sehr einfache Formeln angegeben. Die H_{02} -Welle enthält den weitaus größten Teil der Leistung aller höheren Wellentypen, die von der ankommenden H_{01} -Welle angeregt werden. Ist z. B. der Durchmesser des ankommenden Hohlleiters 1 cm, der des abgehenden 5 cm, die Frequenz 60 GHz, die Länge des kegelförmigen Übergangs 20 cm, so enthält die H_{02} -Welle 8% der ankommenden Leistung.

Formulas are derived for the calculation of the reflection and transmission coefficients, when an H_{0n} -mode impinges upon a conical transition between two waveguides. Curves are shown in particular of the reflection coefficient up to an aperture angle of 60° for the case of an incident H_{01} -mode that is capable of existence only in the incoming waveguide. The magnitude of the reflection coefficient decreases with increasing frequency, and it increases with the aperture angle of the cone. At 1.2 times the cutoff frequency of the guide, for instance, the magnitude of the reflection coefficient for an aperture angle of 36° has the value 0.031 and for an aperture angle of 60° it is 0.084. A conical horn of infinite length presents to the incoming waveguide a termination consisting of a resistance with an inductance in parallel. For the transmission coefficients very simple formulas are devised under the assumption of a small aperture angle of the cone. The H_{02} -mode contains most of the power of all higher modes excited by the incoming H_{01} -mode. If, for instance, the diameter of the incoming waveguide 1 cm, that of the outgoing waveguide 5 cm, the frequency 60 Gc/s and the length of the conical transition 20 cm, the H_{02} -mode contains 8% of the incoming power.

Einleitung

Für kleine Öffnungswinkel des Kegels oder für Übergänge mit sich nur langsam änderndem Öffnungswinkel wurden schon in [1] bis [7] Berechnungen durchgeführt. Um nun eine allgemeinere und genauere Grundlage zur Berechnung von Übergängen bei runden Hohlleitern zu schaffen, werden zunächst einmal in dieser Arbeit für die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten bei Einfall einer H_{0n} -Welle auf einen kegelförmigen Übergang zwischen zwei Hohlleitern (Bild 1) Gleichungen und

Formeln abgeleitet, die auch noch für relativ große Öffnungswinkel des Kegels gelten. In einer weiteren Arbeit soll später noch der Einfall einer H_{mn} -Welle behandelt werden.

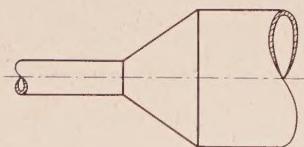
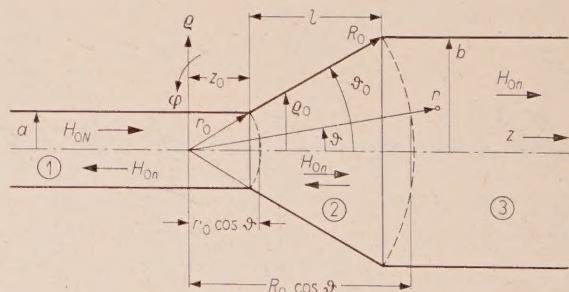


Bild 1. Kegelförmiger Übergang zwischen zwei runden Hohlleitern.

1. Mathematische Methode

Die einfallende Welle ist eine H_{0n} -Welle mit vorgegebenem $n = N$. Die gesamte Leitungsanordnung (Bild 2) ist rotationssymmetrisch. Es werden daher

an den Stoßstellen nur H_{0n} -Wellen ($n = 1, 2, 3, \dots$) angeregt. Im Kegel sind die H_{0n} -Wellen Kugelwellen. Diese haben im Gegensatz zu den Wellen im Hohlleiter keine Grenzfrequenz.



in der Differentialgleichung, welche die Kugelfunktionen ergibt, $\tan \vartheta = \sin \vartheta = \vartheta$ gesetzt. Hierdurch ergeben sich Besselsche Funktionen an Stelle der Kugelfunktionen. Die Bilder 3 und 4 zeigen für

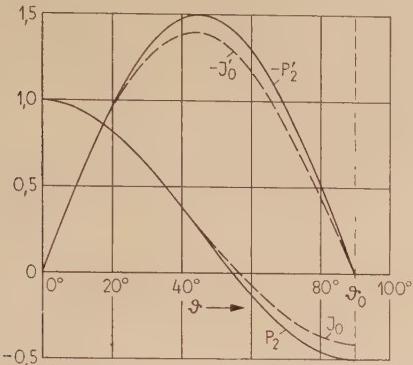


Bild 3. Vergleich zwischen Kugelfunktion P_2 und Besselscher Funktion J_0 und zwischen deren Ableitungen bei einem halben Öffnungswinkel $\vartheta_0 = 90^\circ$ des Kegels;

$$\begin{aligned} P_2 &= P_2(\cos \vartheta), & J_0 &= J_0(y_1 \vartheta / \vartheta_0), \\ P'_2 &= dP_2/d\vartheta, & J'_0 &= dJ_0/d\vartheta. \end{aligned}$$

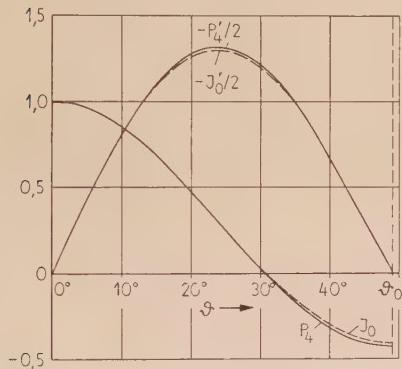


Bild 4. Vergleich zwischen Kugelfunktion P_4 und Besselscher Funktion J_0 und zwischen deren Ableitungen bei einem halben Öffnungswinkel $\vartheta_0 = 49,1^\circ$ des Kegels;

$$\begin{aligned} P_4 &= P_4(\cos \vartheta), & J_0 &= J_0(y_1 \vartheta / \vartheta_0), \\ P'_4 &= dP_4/d\vartheta, & J'_0 &= dJ_0/d\vartheta. \end{aligned}$$

$\vartheta_0 = 90^\circ$ und $\vartheta_0 = 49,1^\circ$ einen Vergleich zwischen den exakten Lösungen im Kegel, also den Kugelfunktionen, und den aus der Differentialgleichung als Näherung erhaltenen Besselschen Funktionen. In den Bildern 3 und 4 sind die der H_{01} -Welle entsprechenden Funktionen aufgetragen. Für die höheren Wellentypen (H_{0n} -Wellen) gilt dasselbe. Das heißt, die Abweichung wächst mit ϑ_0 , und die größte Abweichung der Besselschen Funktion — bezogen auf den Maximalwert der Kugelfunktion — beträgt bei einem halben Öffnungswinkel von 50° etwa 2%. Die mittlere Abweichung der Besselschen Funktion von der Kugelfunktion ist daher bei einem halben Öffnungswinkel von $\vartheta_0 = 60^\circ$ immer noch kleiner als 2%. Man kann deshalb auch bei relativ großen Öffnungswinkeln die Kugelfunktionen durch Besselsche Funktionen ersetzen und hierdurch die Rechnung wesentlich vereinfachen.

Als Trennfläche zwischen den Medien 1 (ankommender Hohlleiter) und 2 (kegelförmiger Übergang) wird die Ebene $r = r_0$, als Trennfläche zwischen den Medien 2 und 3 (abgehender Hohlleiter) die Ebene $r = R_0$ genommen (siehe Bild 2). Nach Entwicklung der zu diesen Trennflächen tangential liegenden Feldkomponenten der Hohlleiterwellen in die Eigenfunktionen des Kegels und anschließender Benutzung der Stetigkeitsbedingungen erhält man dann ein unendliches Gleichungssystem zur Berechnung der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten.

Die hierbei auftretenden Integrale werden näherungsweise durch unendliche Reihen gelöst. Der auftretende mittlere Fehler ist wiederum wie bei der Ersetzung der Kugelfunktionen durch Besselsche Funktionen bis zu einem halben Öffnungswinkel von 60° kleiner als 2%.

2. Die Ergebnisse der Rechnung und ihre physikalische Deutung

2.1. Der Feldwellenwiderstand der H_{0n} -Welle im Kegel

Nach [8] und Gl. (34) ist für eine in Richtung wachsender r fortschreitende H_{0n} -Welle der Feldwellenwiderstand im Kegel gegeben durch¹

$$Z_{n2}^{(2)} = -E_\varphi^{(2)}/H_\vartheta^{(2)}, \quad \text{d. h.}$$

$$\begin{aligned} Z_{n2}^{(2)}(r) &= -jZ_0 \frac{\sqrt{\beta_0 r} H_\eta^{(2)}(\beta_0 r)}{\frac{d}{d(\beta_0 r)} [\sqrt{\beta_0 r} H_\eta^{(2)}(\beta_0 r)]} = \\ &= \frac{jZ_0}{\eta - \frac{1}{2} - \frac{H_{\eta-1}^{(2)}(\beta_0 r)}{H_\eta^{(2)}(\beta_0 r)}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Hierin bedeutet

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{y_n}{\vartheta_0}\right)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Wie Gl. (1) zeigt, ist wegen der Hankelschen Funktionen der Feldwellenwiderstand der H_{0n} -Welle im Kegel komplex und abhängig von r . Eine Grenzfrequenz gibt es nicht, da die Hankelschen Funktionen das Argument $\beta_0 r$ haben. Daher ist hier die Größe β_0 (Phasenkonstante einer ebenen Welle im leeren Raum) auch die Fortpflanzungskonstante im Fernfeld, wo $Z_{n2}^{(2)}$ in den Feldwellenwiderstand Z_0 des leeren Raumes übergeht. Der Feldwellenwiderstand $Z_{12}^{(2)}$ einer in Richtung abnehmender r fortschreitenden H_{0n} -Welle ist konjugiert komplex zu $Z_{n2}^{(2)}$.

In den Bildern 5 bis 8 ist $Z_{12}^{(2)}/Z_0$ für $r = r_0$ nach Betrag und Phase in Abhängigkeit von der Frequenz (λ_c/λ_0) und dem halben Öffnungswinkel ϑ_0 aufgetragen. $Z_{12}^{(2)}$ hat hier immer einen positiven

¹ Eine Erklärung der verwendeten Formelzeichen befindet sich am Ende der Arbeit.

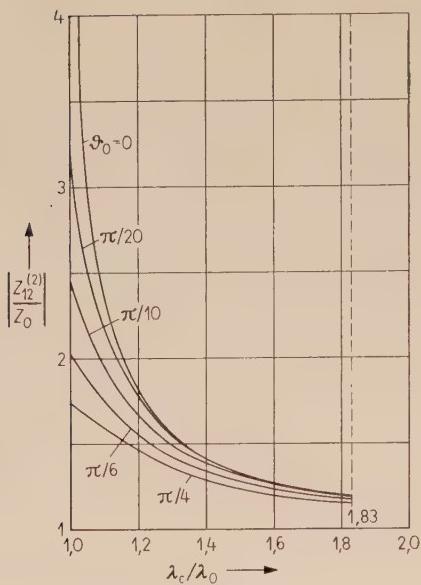


Bild 5. Betrag von $Z_{12}^{(2)}/Z_0$ in Abhängigkeit von λ_c/λ_0 für $r = r_0$.

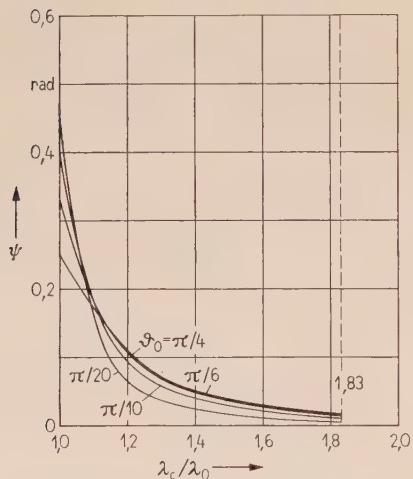


Bild 6. Phasenwinkel ψ von $Z_{12}^{(2)}/Z_0$ in Abhängigkeit von λ_c/λ_0 für $r = r_0$.

Bilder 5 bis 8. Relativer Feldwellenwiderstand $Z_{12}^{(2)}/Z_0 = |Z_{12}^{(2)}/Z_0| e^{j\psi}$ der im Kegel in Richtung r laufenden H_{01} -Welle an der Stelle $r = r_0$ in Abhängigkeit von der Frequenz (λ_c/λ_0) und dem halben Öffnungswinkel ϑ_0 des Kegels.

Phasenwinkel. Demnach kann man $Z_{12}^{(2)}$ als Parallelschaltung aus reelem Widerstand und Induktivität auffassen. Bei vorgegebenem Öffnungswinkel des Kegels nehmen mit wachsendem λ_c/λ_0 , also mit wachsender Frequenz, Betrag und Phasenwinkel von $Z_{12}^{(2)}$ ab, und der komplexe Wert nähert sich dem Feldwellenwiderstand der H_{01} -Welle im runden Hohlleiter (Bilder 5 und 6). Bei vorgegebenem λ_c/λ_0 nimmt mit wachsendem Öffnungswinkel des Kegels der Betrag von $Z_{12}^{(2)}$ ebenfalls ab, der Phasenwinkel jedoch nimmt im allgemeinen zu (Bilder 7 und 8). Nur in der Nähe der Grenzfrequenz ($\lambda_c/\lambda_0 = 1$) des runden Hohlleiters hat man ein Anwachsen und dann ein Abnehmen des Phasenwinkels in Abhängigkeit von ϑ_0 .

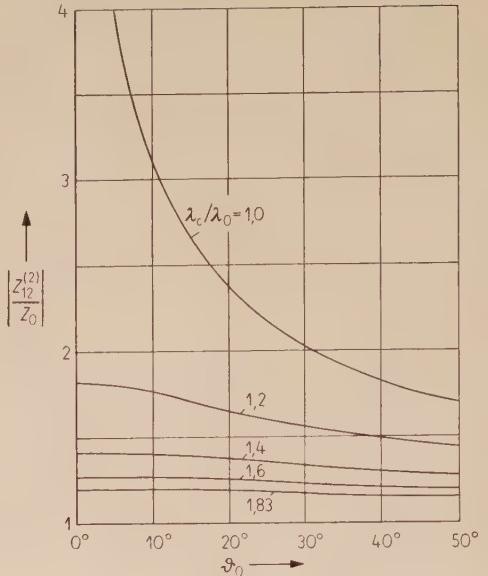


Bild 7. Betrag von $Z_{12}^{(2)}/Z_0$ in Abhängigkeit von ϑ_0 für $r = r_0$.

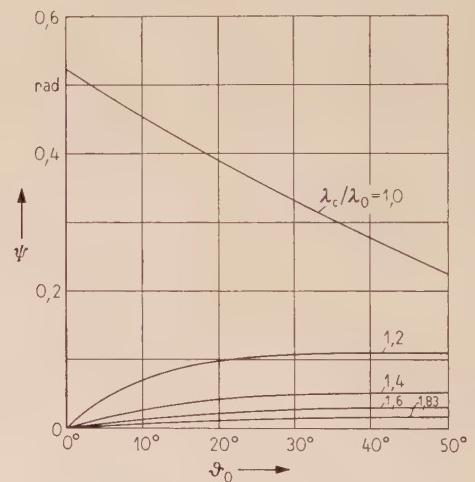
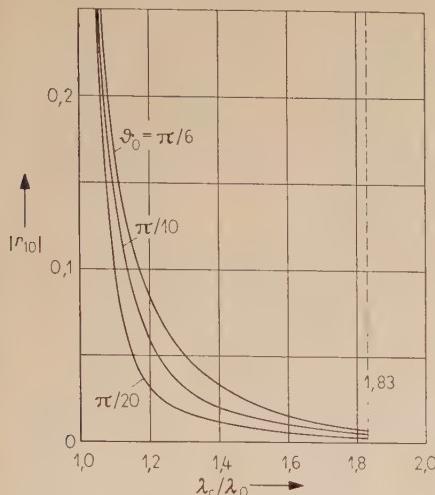
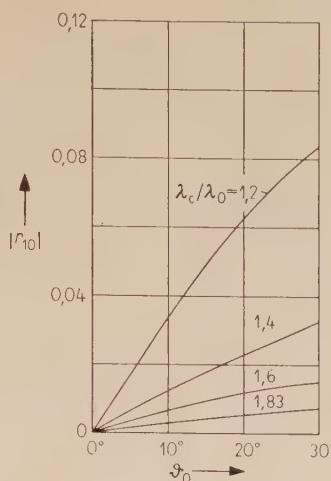
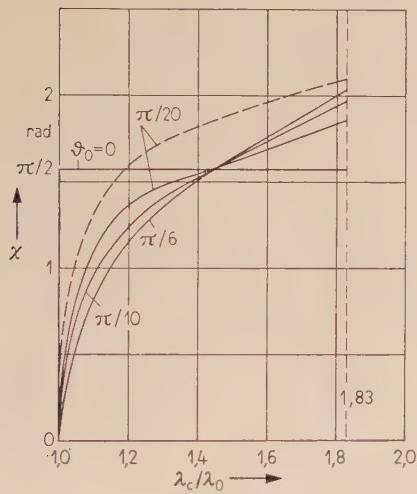
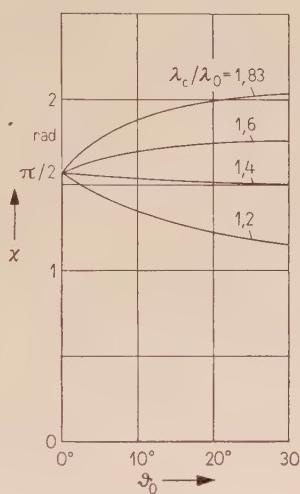


Bild 8. Phasenwinkel ψ von $Z_{12}^{(2)}/Z_0$ in Abhängigkeit von ϑ_0 für $r = r_0$.

2.2. Reflexionskoeffizienten, insbesondere Reflexionskoeffizient der H_{01} -Welle

2.2.1. Reflexionskoeffizient bei Einfalleiner H_{01} -Welle und unendlich langem kegelförmigem Übergang

Im allgemeinen sind die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten aus Gl. (38) zu berechnen. Zunächst soll einmal nur der Einfall einer H_{01} -Welle betrachtet werden und vorausgesetzt werden, daß nur diese im Hohlleiter mit dem Radius a existenzfähig und der kegelförmige Übergang unendlich lang ist. In diesem Fall gibt es nur eine Reflexion an der Stelle $r = r_0$ bzw. $z = z_0$ (siehe Bild 2). Außerdem ist nur der Reflexionskoeffizient der H_{01} -Welle

Bild 9. Betrag von r_{10} in Abhängigkeit von λ_c/λ_0 .Bild 11. Betrag von r_{10} in Abhängigkeit von ϑ_0 .Bild 10. Phasenwinkel χ von r_{10} in Abhängigkeit von λ_c/λ_0 :
— — Näherung nach Gl. (6).Bild 12. Phasenwinkel χ von r_{10} in Abhängigkeit von ϑ_0 .

Bilder 9 bis 12. Reflexionskoeffizient $r_{10} = |r_{10}| e^{j(\pi-\chi)}$ der H_{01} -Welle bei Einfall einer H_{01} -Welle aus einem runden Hohlleiter auf ein unendlich langes kegelförmiges Horn in Abhängigkeit von der Frequenz (λ_c/λ_0) und von dem halben Öffnungswinkel ϑ_0 des Kegels.

von Interesse, da die anderen Wellentypen keine Energie transportieren. Bei Einfall einer H_{01} -Welle ist der Reflexionskoeffizient r_{10} das Verhältnis von der elektrischen Feldstärke der reflektierten H_{01} -Welle zu der elektrischen Feldstärke der einfallenden H_{01} -Welle bei $z = z_0$. Die Stelle $z = z_0$ ist die ebene Übergangsstelle vom runden Hohlleiter mit dem Radius a zum Kegel (siehe Bild 2).

Die Bilder 9 bis 12 zeigen nun $r_{10} = |r_{10}| e^{j(\pi-\chi)}$ nach Betrag und Phase in Abhängigkeit von der Frequenz (λ_c/λ_0) und vom halben Öffnungswinkel ϑ_0 des Kegels. Es ist $1 \leq \lambda_c/\lambda_0 \leq 1,83$ entsprechend der Voraussetzung, daß nur die H_{01} -Welle im Hohlleiter existenzfähig ist, und $0 \leq \vartheta_0 \leq \pi/6$. Außerdem ist, wie oben erwähnt, der kegelförmige Übergang als unendlich lang vorausgesetzt. Die Kurven

wurden aus dem Gleichungssystem (56) berechnet. Es wurde hierbei bis zur dritten Näherung gerechnet, d. h., die ersten drei Gleichungen vom Gleichungssystem (56) wurden berücksichtigt und der wirkliche Wert geschätzt. Insbesondere wurde der gemeinsame Schnittpunkt der Phasenkurven in Bild 10 nicht exakt gefunden, sondern durch Überlegungen hinsichtlich der Konvergenz der Rechnungen und durch Vergleich mit dem in [12] behandelten ähnlichen Problem als sehr wahrscheinlich angenommen. Die Konvergenz wird mit wachsender Frequenz (λ_c/λ_0) und wachsendem Öffnungswinkel immer schlechter. Zu bemerken ist, daß der Betrag des Reflexionskoeffizienten mit den höheren Näherungen kleiner wird. Physikalisch ist das durch die Berücksichtigung der den höheren Näherungen entsprechenden höheren Wellentypen zu erklären. Denn diese transportieren im Kegel wegen des Fortfalls der Grenzfrequenz immer Energie. Ein paar Zahlenbeispiele mögen noch den Grad der Konvergenz etwas erläutern. Für $\lambda_c/\lambda_0 = 1$ und beliebigen Öffnungswinkel ist der aus der ersten Näherung berechnete Reflexionskoeffizient identisch mit dem aus dem unendlichen Gleichungssystem sich ergebenden exakten, nämlich $r_{10} = -1$. In Bild 9 enden demnach für $\lambda_c/\lambda_0 = 1$ alle Kurven bei 1. Für $\lambda_c/\lambda_0 = 1,2$ dagegen beträgt die Abweichung der zweiten von der ersten Näherung des Reflexionskoeffizienten r_{10} bei $\vartheta_0 = \pi/10$ schon 7,5%, bei $\vartheta_0 = \pi/6$

sogar 11%. Bei $\vartheta_0 = \pi/6$ beträgt für $\lambda_c/\lambda_0 = 1,2$ die Abweichung der dritten von der zweiten Näherung 4,5%. Für $\lambda_c/\lambda_0 = 1,83$ (Grenzfrequenz der H_{02} -Welle im Hohlleiter) geht die Abweichung der zweiten von der ersten Näherung bei $\vartheta_0 = \pi/10$ auf 27%, bei $\vartheta_0 = \pi/6$ auf 49%. Bei $\vartheta_0 = \pi/6$ beträgt für $\lambda_c/\lambda_0 = 1,83$ die Abweichung der dritten von der zweiten Näherung noch 21%.

Der Betrag von r_{10} nimmt mit wachsender Frequenz ab und mit wachsendem Öffnungswinkel zu (Bilder 9 und 11). Die Phase $(\pi - \chi)$ liegt immer in der oberen Hälfte der Gaußschen Zahlenebene. Außerdem ist für $\lambda_c/\lambda_0 > 1,44$ der Winkel $\chi > \pi/2$ und wächst mit zunehmendem Öffnungswinkel. Für $\lambda_c/\lambda_0 < 1,44$ dagegen ist der Winkel $\chi < \pi/2$ und nimmt mit zunehmendem Öffnungswinkel ab (Bil-

der 10 und 12). Das Feld-Ersatzschaltbild des unendlich langen Kegels bei einer aus dem Hohlleiter mit dem Radius a einfallenden H_{01} -Welle kann man dem Feldwellenwiderstand (Bilder 5 bis 8) entsprechend als Parallelschaltung aus realem Widerstand und Induktivität auffassen.

Bei der Existenzfähigkeit von höheren Wellentypen im Hohlleiter müssen auch deren Reflexionskoeffizienten berücksichtigt werden. Denn alle existenzfähigen Wellentypen transportieren Energie. Für diesen Fall kann man bei der Berechnung der Reflexionskoeffizienten der höheren Wellentypen meist an Stelle des Gleichungssystems (56) das vereinfachte Gleichungssystem (86) verwenden. Das Gleichungssystem (86) bedeutet, daß bei der Berechnung des Reflexionskoeffizienten r_n nur die H_{0i} -Wellen ($i = 1, 2, 3, \dots$) mit $i \leq n$ berücksichtigt werden. Denn nur diese werden einen wesentlichen Beitrag liefern, da immer $r_n \ll r_{n+1}$ sein wird. Voraussetzung hierfür ist natürlich, daß die einfallende Welle eine H_{01} -Welle ist.

Bei Einfall einer H_{0N} -Welle gilt das Entsprechende. Das heißt, der Reflexionskoeffizient dieser Welle hat den größten Wert, und die Reflexionskoeffizienten der anderen Wellentypen sind entsprechend kleiner.

2.2.2. Näherungen für den Reflexionskoeffizienten bei Einfall einer H_{01} -Welle und unendlich langem Kegel

Setzt man die Gl. (61), (63) und (65) in die Gl. (85) ein und berücksichtigt nur die Glieder mit Potenzen bis ϑ_0^2 , so ergibt sich mit $\tan \vartheta_0 = \vartheta_0(1 + \vartheta_0^2/3)$ und Benutzung von Gl. (84) für den Reflexionskoeffizienten der H_{01} -Welle an der Stelle $z = z_0$

$$r_{10} \approx \frac{Z_{12}^{(2)}(r_0) - Z_1^{(1)} e^{-j\frac{2}{3}\beta_1^{(1)} a \vartheta_0}}{Z_{12}^{(2)}(r_0) + Z_1^{(1)} e^{-j\frac{2}{3}\beta_1^{(1)} a \vartheta_0}}. \quad (3)$$

Hierin bedeutet $Z_{12}^{(2)}(r_0)$ den Feldwellenwiderstand der in Richtung wachsender r fortschreitenden H_{01} -Welle im Kegel an der Stelle $r = r_0$. Unter der Voraussetzung

$$\frac{\beta_0 a}{y_1} < 1 > 3 \left(\frac{\vartheta_0}{y_1} \right)^{2/3} \quad (4)$$

darf man $Z_{12}^{(2)}(r_0)$ durch Gl. (74) ausdrücken, in der in diesem Fall $p = 1$ und $\varrho_0 = a$ gesetzt wird. Unter Benutzung von Gl. (74), $Z_1^{(1)} = Z_0 \beta_0 / \beta_1^{(1)}$ und $\beta_1^{(1)} = \beta_1$ ergibt sich dann aus Gl. (3) bei Vernachlässigung der Glieder mit den höheren Potenzen von ϑ_0

$$r_{10} \approx \frac{1}{\left| 1 - \left| \frac{4(\beta_1^{(1)} a)^3}{y_1^2 \vartheta_0} \right|^2 \right|^2} e^{j(\pi - \chi)}, \quad (5)$$

$$\chi \approx \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \beta_1^{(1)} a \vartheta_0 - \quad (6)$$

$$\arctan \left\{ \frac{y_1^2 \vartheta_0}{4(\beta_1^{(1)} a)^3} \left[1 + 4 \left(\frac{\beta_0 a}{y_1} \right)^2 + \left(\frac{\beta_0 a}{y_1} \right)^4 \right] \right\}.$$

Hierin bedeutet $y_1 = 3,8317$ die erste Nullstelle der Besselschen Funktion J_1 . Bemerkenswert ist, daß in Gl. (3) im Prinzip nur die Feldwellenwiderstände der H_{01} -Welle im Kegel und im Hohlleiter auftreten, wie man es bei den Problemen ohne Anregung höherer Wellentypen gewohnt ist. Für $\vartheta_0 = \pi/20$ stimmen die aus der Gl. (3) berechneten Werte praktisch mit den in den Bildern 9 bis 12 angegebenen überein. Der aus Gl. (6) sich ergebende Winkel χ ist für $\vartheta_0 = \pi/20$ in Bild 10 eingezeichnet. Wie man sieht, ist hier die Abweichung von dem wirklichen Wert ziemlich groß. Der aus der Gl. (5) sich ergebende Betrag von r_{10} stimmt bei $\vartheta_0 = \pi/20$ praktisch mit dem in Bild 9 überein.

2.2.3. Reflexionskoeffizienten bei endlich langem kegelförmigem Übergang, Näherungen

Bei endlich langem Kegel können im Gegensatz zum unendlich langen Kegel die Transmissionskoeffizienten t_n nicht eliminiert werden. In diesem Fall hat also das Gleichungssystem (38) bei der i -ten Näherung $2i$ Gleichungen und somit bei der ersten Näherung 2 Gleichungen.

Bei Einfall einer H_{01} -Welle ergibt sich daher die erste Näherung des Reflexionskoeffizienten r_{10} aus dem Gleichungssystem (38), indem man $r_n = t_n = 0$ für $n = 2, 3, 4, \dots$ setzt und t_1 eliminiert. Setzt man in diese erste Näherung die Gl. (61), (63) und (65) ein und berücksichtigt nur die Glieder mit Potenzen bis ϑ_0^2 , so ergibt sich bei Benutzung von Gl. (84) mit $\tan \vartheta_0 = \vartheta_0(1 + \vartheta_0^2/3)$ der Reflexionskoeffizient zu

$$r_{10} = \frac{r_a + r_b P_a f(a, b)}{1 + r_b Q_a f(a, b)} e^{-j\frac{2}{3}\beta_1^{(1)} a \vartheta_0}. \quad (7)$$

Hierin bedeuten

$$r_a = \frac{1 - \frac{Z_1^{(1)}}{Z_{12}^{(2)}(r_0)}}{1 + \frac{Z_1^{(1)}}{Z_{12}^{(2)}(r_0)}}, \quad r_b = -\frac{1 - \frac{Z_1^{(3)}}{Z_{12}^{(2)}(R_0)}}{1 + \frac{Z_1^{(3)}}{Z_{12}^{(2)}(R_0)}} \quad (8), (9)$$

$$P_a = \frac{1 + \frac{Z_1^{(1)}}{Z_{11}^{(2)}(r_0)}}{1 + \frac{Z_1^{(1)}}{Z_{12}^{(2)}(r_0)}}, \quad Q_a = \frac{1 - \frac{Z_1^{(1)}}{Z_{11}^{(2)}(r_0)}}{1 + \frac{Z_1^{(1)}}{Z_{12}^{(2)}(r_0)}} \quad (10), (11)$$

$$f(a, b) = \frac{H_\eta^{(2)}(\beta_0 R_0) H_\eta^{(1)}(\beta_0 r_0)}{H_\eta^{(1)}(\beta_0 R_0) H_\eta^{(2)}(\beta_0 r_0)}. \quad (12)$$

Die Gl. (7) bis (12) entsprechen der Gl. (3), wie insbesondere der Aufbau der Gl. (8) bis (11) zeigt.

Bei der Voraussetzung Ugl. (4) erhält man die den Gl. (5) und (6) entsprechenden Formeln, nämlich

$$r_a = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\Theta_a^2}} \times \\ \times \exp j \left\{ \frac{\pi}{2} + \arctan [\Theta_a (1 + g_a)] \right\}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} r_b &= \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\Theta_b^2}} \times \\ &\quad \times \exp -j \left\{ \frac{\pi}{2} + \arctan [\Theta_b (1 - g_b)] \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$P_a = \exp j 2 \arctan \Theta_a, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} Q_a &= \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\Theta_a^2}} \times \\ &\quad \times \exp -j \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctan [\Theta_a (1 - g_a)] \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$f(a, b) = \exp -j \beta_0 D. \quad (17)$$

Die Größen Θ_a und Θ_b ergeben sich aus

$$\Theta_{\vartheta_0} = \frac{y_1^2 \vartheta_0}{4 (\beta_1 \varrho_0)^3}. \quad (18)$$

Bei Θ_a wird in Gl. (18) $\varrho_0 = a$, bei Θ_b wird $\varrho_0 = b$ gesetzt. Die Größen g_a und g_b ergeben sich aus

$$g_{\vartheta_0} = 4 \left(\frac{\beta_0 \varrho_0}{y_1} \right)^2 + \left(\frac{\beta_0 \varrho_0}{y_1} \right)^4. \quad (19)$$

Bei g_a wird in Gl. (19) $\varrho_0 = a$, bei g_b wird $\varrho_0 = b$ gesetzt. In Gl. (17) bedeutet

$$\begin{aligned} D &= R_0 (\cos \alpha_b + \alpha_b \sin \alpha_b) - \\ &\quad - r_0 (\cos \alpha_a + \alpha_a \sin \alpha_a), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\sin \alpha_b = \frac{\eta}{\beta_0 R_0}, \quad \sin \alpha_a = \frac{\eta}{\beta_0 r_0}. \quad (21), (22)$$

Die Größe r_a entsteht durch die Reflexion an der Stelle $r = r_0$, also am Ende des Hohlleiters mit dem Radius a . (Man vgl. Gl. (5).) Die Größe r_b entsteht durch die Reflexion an der Stelle $r = R_0$, also am Anfang des Hohlleiters mit dem Radius b . Die Größe D entspricht dem Abstand der Reflexionsstellen.

Bei $\alpha_b \ll 1$ und $\alpha_a \ll 1$ wird $D = R_0 - r_0$.

Wenn Gl. (4) noch nicht erfüllt ist, aber die entsprechende Gleichung, d. h. Gl. (77) für $\varrho_0 = b$ gilt, kann man natürlich an Stelle von Gl. (9) die Gl. (14) schreiben.

Wie die Gl. (7) bis (18) zeigen, ist bei großem Verhältnis b/a der Reflexionskoeffizient der H_{01} -Welle an der Übergangsstelle vom Kegel zum Hohlleiter mit dem Radius b klein gegenüber dem Reflexionskoeffizienten der H_{01} -Welle an der Übergangsstelle vom Kegel zum Hohlleiter mit dem Radius a . Daselbe gilt natürlich auch für die Reflexionskoeffizienten der H_{0n} -Wellen. Da nun bei Einfall einer H_{01} -Welle die Reflexionskoeffizienten der höheren Wellentypen klein gegenüber dem der H_{01} -Welle sein werden, kann man in praktischen Fällen die Reflexionen der höheren Wellentypen an der Stelle $r = R_0$ vernachlässigen. Das heißt, bei endlich langem Übergang, aber großem b/a genügt es, die Reflexionskoeffizienten der höheren Wellentypen aus dem Gleichungssystem (56) oder (86) zu berechnen.

2.3. Transmissionskoeffizienten bei Einfall einer H_{01} -Welle und endlich langem kegelförmigem Übergang

Aus dem Anhang, Abschnitte 4.2 und 4.3, ergibt sich, daß man bei der Berechnung der Transmissionskoeffizienten die Reflexionskoeffizienten in erster Näherung vernachlässigen kann, wenn die Frequenz sehr viel größer als die Grenzfrequenz der einfallenden Welle im an kommenden Hohlleiter ist. Außerdem können bei einem langen Kegel die bei z_0 (siehe Bild 2) angeregten höheren Wellentypen vernachlässigt werden, wenn die einfallende Welle eine H_{01} -Welle und nur diese im an kommenden Hohlleiter existenzfähig ist. Man braucht dann nur die höheren Wellentypen zu berücksichtigen, welche durch die H_{01} -Welle an der Stelle des Übergangs vom Kegel zum Hohlleiter mit dem Radius b (siehe Bild 2) angeregt werden.

Aus Gl. (106) erhält man nach Einsetzen von Gl. (60) und (61) und Vernachlässigung der Glieder mit den höheren Potenzen von ϑ_0

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{4 \beta_0 b y_1^2 \vartheta_0}{(y_n^2 - y_1^2)^2} \frac{J_0(y_1)}{J_0(y_n)} \times \\ &\quad \times \exp j \left\{ -\frac{\pi}{2} + \frac{\beta_0 b \vartheta_0}{6} \left[1 + \frac{a}{b} - 36 \frac{y_n^2 + y_1^2}{(y_n^2 - y_1^2)^2} \right] \right\}, \\ n &= 2, 3, 4, \dots. \end{aligned} \quad (23)$$

Aus den Gl. (23) und (107) bis (109) ergibt sich, daß unter der Voraussetzung

$$\beta_1^{(3)} \approx \beta_1^{(1)} \approx \beta_0, \quad (24)$$

d. h. bei genügend hohen Frequenzen, und unter der Voraussetzung

$$\frac{1}{6} \beta_1^{(3)} b \vartheta_0 \ll 1, \quad (25)$$

d. h. bei genügend kleinem Öffnungswinkel, das Verhältnis der Leistung P_n der angeregten H_{0n} -Welle im Hohlleiter mit dem Radius b zur Leistung P_g der an kommenden H_{01} -Welle gegeben ist durch

$$\frac{P_1}{P_g} = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{4 y_1 y_n}{(y_n^2 - y_1^2)^2} \beta_0 b \vartheta_0 \right]^2, \quad (26)$$

$$\frac{P_n}{P_g} = \left| \frac{4 y_1 y_n}{(y_n^2 - y_1^2)^2} \right|^2 (\beta_0 b \vartheta_0)^2, \quad n = 2, 3, 4, \dots. \quad (27)$$

Setzt man in Gl. (109) die Gl. (107) und (108) und darauf $|t_n|$ aus Gl. (23) ein, so ergibt sich bei Hinzufügung der Phase aus Gl. (104) für den Transmissionskoeffizienten der H_{01} -Welle

$$\begin{aligned} t_1 &\approx \sqrt{1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left[4 \frac{\beta_0 b y_1 y_n \vartheta_0}{(y_n^2 - y_1^2)^2} \right]^2} \times \\ &\quad \times \exp j \left[\frac{\beta_0 b \vartheta_0}{6} \left(\frac{a}{b} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Die Gl. (23) und (26) bis (28) entsprechen den Ergebnissen in [7].

Bild 13 zeigt P_n/P_g in Abhängigkeit von $\beta_0 b \vartheta_0$. Aus Bild 13 oder Gl. (26) und (27) ergibt sich z. B. bei einem an kommenden Hohlleiter mit $a = 0,5$ cm, einem ab gehenden Hohlleiter mit $b = 2,5$ cm, $\lambda_0 = 5$ mm, $\vartheta_0 = 0,1$ (Öffnungswinkel des Kegels $11,4^\circ$; Länge des Übergangs $l = 20$ cm), daß die H_{02} -Welle 8% der an kommenden Energie enthält. Die im Hohlleiter mit dem Radius b weiterlaufende H_{01} -Welle enthält noch 91,5% der an kommenden Energie. Das heißt, die H_{02} -Welle enthält den weit aus größten Teil der Energie, die von der an kommenden H_{01} -Welle in die höheren Wellentypen investiert wird.

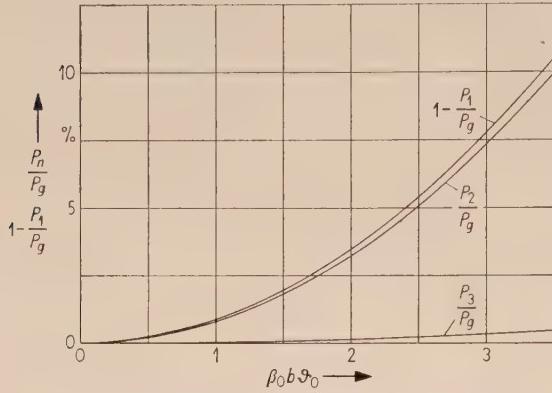


Bild 13. Leistungsverhältnis P_n/P_g in Abhängigkeit von $\beta_0 b \vartheta_0$;

P_n Leistung der H_{0n} -Welle im Hohlrohr mit dem Radius b ,

P_g Leistung der an kommenden H_{01} -Welle.

Anhang

1. Die Wellentypen im Hohlleiter und im kegelförmigen Übergang

1.1. Die Wellentypen im Hohlleiter

Unter Weglassung des Faktors $e^{j\omega t}$ sind die auf die elektrische Feldstärke E_0 und auf die magnetische Feldstärke $H_0 = E_0/Z_0$ bezogenen Feldstärken der H_{0n} -Wellen in den Hohlleitern (Bild 2) gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{E_\varphi^{(1)}}{E_0} &= y_N J_1\left(y_N \frac{\varrho}{a}\right) e^{-j\beta_N^{(1)} z} + \\ &\quad + \sum r_n y_n J_1\left(y_n \frac{\varrho}{a}\right) e^{j\beta_n^{(1)} z}, \\ \frac{H_\varrho^{(1)}}{H_0} &= -y_N \frac{Z_0}{Z_N^{(1)}} J_1\left(y_N \frac{\varrho}{a}\right) e^{-j\beta_N^{(1)} z} + \\ &\quad + \sum_n r_n y_n \frac{Z_0}{Z_n^{(1)}} J_1\left(y_n \frac{\varrho}{a}\right) e^{j\beta_n^{(1)} z}, \\ \frac{H_z^{(1)}}{H_0} &= \frac{j}{\beta_0 a} \left[y_N^2 J_0\left(y_N \frac{\varrho}{a}\right) e^{-j\beta_N^{(1)} z} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_n r_n y_n^2 J_0\left(y_n \frac{\varrho}{a}\right) e^{j\beta_n^{(1)} z} \right], \quad (29) \\ n &= 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{E_\varphi^{(3)}}{E_0} &= \sum_q t_q y_q \frac{a}{b} J_1\left(y_q \frac{\varrho}{b}\right) e^{-j\beta_q^{(3)} z}, \\ \frac{H_\varrho^{(3)}}{H_0} &= -\sum_q t_q y_q \frac{Z_0}{Z_q^{(3)}} \frac{a}{b} J_1\left(y_q \frac{\varrho}{b}\right) e^{-j\beta_q^{(3)} z}, \\ \frac{H_z^{(3)}}{H_0} &= \sum_q j t_q \frac{y_q^2}{\beta_0 b} \frac{a}{b} J_0\left(y_q \frac{\varrho}{b}\right) e^{-j\beta_q^{(3)} z}, \quad (30) \\ q &= 1, 2, 3, \dots. \end{aligned}$$

Der Index (1) bedeutet, daß es sich um Feldstärken im Medium 1 (Hohlleiter mit Radius a) handelt. Der Index (3) bedeutet, daß es sich um Feldstärken im Medium 3 (Hohlleiter mit Radius b) handelt. Die Größen t_q sind die unbekannten Durchlaßkoeffizienten.

1.2. Die Wellentypen im kegelförmigen Übergang

In [8] wurde die allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen für in Richtung r fortschreitende Kugelwellen angegeben. Die Abhängigkeit von ϑ ist dort durch die allgemeine Kugelfunktion $K_\nu^\mu(\cos \vartheta)$ gegeben. Die Größen ν und μ werden durch die Randbedingungen bestimmt (siehe [8]). Setzt man entsprechend [9] in der Differentialgleichung Gl. (11) im Anhang von [8], deren Lösung die Kugelfunktion ist, $\tan \vartheta = \sin \vartheta = \vartheta$, so erhält man an Stelle der Kugelfunktion eine Zylinderfunktion. Im Kegel kommt entsprechend der Lösung im runden Hohlleiter nur die Besselsche Funktion von der Ordnung $\mu = m = 0, 1, 2, \dots$ in Frage. Es gilt daher für nicht allzu große Öffnungswinkel des Kegels $K_\nu^\mu(\cos \vartheta) \approx J_m(\sqrt{\nu(\nu+1)} \vartheta)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ (31)

Analog zum runden Hohlleiter muß dann wegen der Randbedingungen bei den H -Wellen gelten

$$y_p = \sqrt{\nu(\nu+1)} \vartheta_0, \quad (32)$$

$$r + \frac{1}{2} = \eta = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{y_p}{\vartheta_0}\right)^2}, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (33)$$

Im Kegel werden die H_{0n} -Wellen mit H_{0p} -Wellen bezeichnet. Die Wellen laufen hier in Richtung wachsender und abnehmender r . Nach [8] sind dann bei Benutzung von Gl. (31) mit $m = 0$ die auf die elektrische Feldstärke E_0 und die magnetische Feldstärke $H_0 = E_0/Z_0$ bezogenen Feldstärken unter Weglassung des Faktors $e^{j\omega t}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{E_\varphi^{(2)}}{E_0} &= \sum_p \frac{y_p a}{\vartheta_0 r} J_1\left(y_p \frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right) V \beta_0 r \times \\ &\quad \times [d_p H_\eta^{(2)}(\beta_0 r) + w_p H_\eta^{(1)}(\beta_0 r)], \\ \frac{H_\varrho^{(2)}}{H_0} &= -\sum_p \frac{y_p a Z_0}{\vartheta_0 r} J_1\left(y_p \frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right) V \beta_0 r \times \\ &\quad \times \left[\frac{d_p}{Z_{p2}^{(2)}} H_\eta^{(2)}(\beta_0 r) - \frac{w_p}{Z_{p1}^{(2)}} H_\eta^{(1)}(\beta_0 r) \right], \quad (34) \\ \frac{H_r^{(2)}}{H_0} &= \sum_p \frac{j \beta_0 a y_p^2}{(\vartheta_0 \beta_0 r)^2} J_0\left(y_p \frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right) V \beta_0 r \times \\ &\quad \times [d_p H_\eta^{(2)}(\beta_0 r) + w_p H_\eta^{(1)}(\beta_0 r)], \\ p &= 1, 2, 3, \dots. \end{aligned}$$

Hierin bedeuten d_p bzw. w_p die unbekannten Koeffizienten, die den Amplituden der Wellen in Richtung wachsender bzw. abnehmender r entsprechen. Der Index (2) bedeutet, daß es sich um Feldstärken im Medium 2 (Kegel) handelt.

Die Größe $Z_{p2}^{(2)}$ ist aus Gl. (1) zu ersehen, wenn man dort $n = p$ setzt.

2. Das Gleichungssystem zur Berechnung der Reflexions- und Durchlaßkoeffizienten

In Kugelkoordinaten sind hier die zu einer Fläche $r = \text{const}$ tangential liegenden Komponenten der Hohlleiterwellen

$$S_p = \frac{Z_{p1}^{(2)}(r_0) + Z_{p2}^{(2)}(r_0)}{Z_{p1}^{(2)}(r_0)} \frac{H_\eta^{(1)}(\beta_0 r_0) H_\eta^{(2)}(\beta_0 r_0)}{H_\eta^{(1)}(\beta_0 R_0) H_\eta^{(2)}(\beta_0 r_0) - H_\eta^{(2)}(\beta_0 R_0) H_\eta^{(1)}(\beta_0 r_0)}, \quad (47)$$

$$T_p = \frac{Z_{p1}^{(2)}(r_0) + Z_{p2}^{(2)}(r_0)}{Z_{p1}^{(2)}(r_0)} \frac{Z_{p1}^{(2)}(R_0) H_\eta^{(1)}(\beta_0 r_0) H_\eta^{(2)}(\beta_0 r_0)}{Z_{p2}^{(2)}(R_0) H_\eta^{(1)}(\beta_0 R_0) H_\eta^{(2)}(\beta_0 r_0) + Z_{p1}^{(2)}(R_0) H_\eta^{(2)}(\beta_0 R_0) H_\eta^{(1)}(\beta_0 r_0)}. \quad (48)$$

$$E_t = E_\varphi, \quad H_t = H_\vartheta = H_\vartheta \cos \vartheta - H_z \sin \vartheta. \quad (35)$$

Unter Benutzung von

$$z = r \cos \vartheta, \quad (36)$$

$$\varrho = \begin{cases} a \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_0} \approx a \frac{\vartheta}{\vartheta_0} & \text{im Medium 1} \\ b \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_0} \approx b \frac{\vartheta}{\vartheta_0} & \text{im Medium 3} \end{cases} \quad (37)$$

werden die Gl. (29) mit $r = r_0$ und die Gl. (30) mit $r = R_0$ in die Gl. (35) eingesetzt. Man hat dann die Tangentialkomponenten der Feldstärken im Medium 1 zu $r = r_0$ und im Medium 3 zu $r = R_0$. Diese Tangentialkomponenten werden in die Eigenfunktionen des Mediums 2 entwickelt. Hierauf werden die Tangentialkomponenten im Medium 1 den Tangentialkomponenten der Feldstärken von Gl. (34) im Medium 2 an der Stelle $r = r_0$ gleichgesetzt. Ebenso werden die Tangentialkomponenten im Medium 3 den Tangentialkomponenten der Feldstärken in Gl. (34) im Medium 2 an der Stelle $r = R_0$ gleichgesetzt. Nach Eliminierung der Koeffizienten d_p und w_p ergibt sich dann das unendliche Gleichungssystem

$$a_{pN} = - \sum_n (r_n b_{pn} - t_n c_{pn}), \quad (38)$$

$$d_{pN} = - \sum_n (r_n e_{pn} + t_n f_{pn}), \quad n, p = 1, 2, 3, \dots$$

Hierin bedeuten (39)

$$a_{pN} = A_{pN}^* U_p - \frac{Z_{p2}^{(2)}(r_0)}{Z_N^{(1)}} B_{pN}^* - j \frac{Z_{p2}^{(2)}(r_0)}{Z_0} \frac{y_N}{\beta_0 a} C_{pN}^*,$$

$$b_{pn} = \frac{y_n}{y_N} \left[A_{pn} U_p + \frac{Z_{p2}^{(2)}(r_0)}{Z_N^{(1)}} B_{pn} - j \frac{Z_{p2}^{(2)}(r_0)}{Z_0} \frac{y_n}{\beta_0 a} C_{pn} \right], \quad (40)$$

$$c_{pn} = \frac{y_n}{y_N} \sqrt{\frac{a}{b}} S_p F_{pn}, \quad (41)$$

$$d_{pN} = a_{pN} - A_{pN}^* (U_p - V_p), \quad (42)$$

$$e_{pn} = b_{pn} - \frac{y_n}{y_N} A_{pn} (U_p - V_p), \quad (43)$$

$$f_{pn} = \frac{y_n}{y_N} \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{Z_{p2}^{(2)}(R_0)}{Z_n^{(3)}} T_p \left(G_{pn} + j \frac{Z_n^{(3)}}{Z_0} \frac{y_n}{\beta_0 b} E_{pn} \right), \quad (44)$$

$$U_p = 1 + S_p \frac{H_\eta^{(2)}(\beta_0 R_0)}{H_\eta^{(2)}(\beta_0 r_0)}, \quad (45)$$

$$V_p = 1 - T_p \frac{H_\eta^{(2)}(\beta_0 R_0)}{H_\eta^{(2)}(\beta_0 r_0)}, \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{pn} \\ F_{pn} \end{aligned} \right\} = \int_0^{\vartheta_0} J_1 \bar{J}_1 e^{-2s \cos \vartheta} \vartheta d\vartheta, \quad (49)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{pn} \\ G_{pn} \end{aligned} \right\} = \int_0^{\vartheta_0} J_1 \bar{J}_1 e^{-2s \cos \vartheta} \cos \vartheta \vartheta d\vartheta, \quad (50)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{pn} \\ E_{pn} \end{aligned} \right\} = \int_0^{\vartheta_0} J_0 \bar{J}_1 e^{-2s \cos \vartheta} \sin \vartheta \vartheta d\vartheta, \quad (51)$$

$$s = \begin{cases} -j \frac{\beta_n^{(1)} a}{2 \sin \vartheta_0} & \text{bei } A_{pn}, B_{pn}, C_{pn}, \\ j \frac{\beta_n^{(3)} b}{2 \sin \vartheta_0} & \text{bei } F_{pn}, G_{pn}, E_{pn}, \end{cases} \quad (52)$$

$$J_1 = J_1(y_n \vartheta/\vartheta_0), \quad \bar{J}_1 = J_1(y_p \vartheta/\vartheta_0), \quad (53), (54),$$

$$J_0 = J_0(y_n \vartheta/\vartheta_0). \quad (55)$$

Die mit * versehenen Größen sind konjugiert komplex zu den betreffenden Größen ohne * (z. B. ist A_{pN}^* konjugiert komplex zu A_{pN}).

Der Sonderfall des unendlich langen Kegels ($R_0 \rightarrow \infty$) entsteht aus dem Gleichungssystem (38), wenn man entsprechend den wirklichen physikalischen Verhältnissen die reelle Größe β_0 durch eine komplexe Größe mit negativem Imaginärteil (Dämpfung!) ersetzt. Für $R_0 \rightarrow \infty$ werden dann nach Gl. (47) und (48) die Größen $S_p = T_p = 0$, und man erhält

$$\alpha_{pN} = - \sum_n r_n \beta_{pn}, \quad (56)$$

$$n, p = 1, 2, 3, \dots \quad \text{für } R_0 \rightarrow \infty.$$

Es ergeben sich α_{pN} aus a_{pN} , β_{pn} aus b_{pn} , wenn man $U_p = V_p = 1$ setzt.

3. Formeln zur Berechnung der Koeffizienten des Gleichungssystems

3.1. Die Berechnung der Integrale Gl. (49) bis (51)

In den Gl. (49) bis (51) werden $\sin \vartheta = \vartheta$ und $\cos \vartheta = 1 - \vartheta^2/2$ gesetzt. Mit

$$e^{s\vartheta_0} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(s\vartheta_0)^m}{m!} \quad (57)$$

lassen sich die Integrale der Gl. (49) bis (51) dann auf Integrale der Form

$$\int x^m Z_p(kx) \bar{Z}_q(lx) dx \quad (58)$$

zurückführen, die man dann nach [10] durch die allgemeine Formel

$$\begin{aligned} & \int \frac{Z_p(kx) \bar{Z}_q(lx)}{x} \left\{ \frac{(l^2 - k^2)^2}{\mu + 2} x^{\mu+4} + 2(\mu + 1)x^{\mu+2} \times \right. \\ & \times \left[l^2 + k^2 - \frac{(q^2 - p^2)(l^2 - k^2)}{\mu(\mu + 2)} \right] + \\ & + [\mu^2 - (p - q)^2][\mu^2 - (p + q)^2] \frac{x^\mu}{\mu} \left. \right\} dx = \\ & = 2x^{\mu+2} Z'_p \bar{Z}'_q + x(Z'_p \bar{Z}_q - Z_p \bar{Z}'_q) \times \\ & \times \left(\frac{l^2 - k^2}{\mu + 2} x^{\mu+2} - \frac{q^2 - p^2}{\mu} x^\mu \right) - \mu x^{\mu+1} (Z_p \bar{Z}_q)' + \\ & + x^\mu [(l^2 + k^2)x^2 - q^2 - p^2 + \mu^2] Z_p \bar{Z}_q \end{aligned} \quad (59)$$

lösen kann. $Z_p \equiv Z_p(kx)$, $\bar{Z}_q \equiv \bar{Z}_q(lx)$ bedeuten Zylinderfunktionen der Ordnung p bzw. q . Der Strich, so z. B. bei Z'_p , bedeutet Ableitung nach x . Für die in dieser Arbeit auftretenden Integrale kann man in Gl. (59) $\mu = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ setzen.

Nach Ausrechnung der Integrale Gl. (49) bis (51) aus Gl. (59) ergeben sich dann die unendlichen Reihen

$$\begin{aligned} A_{pn} \\ F_{pn} \end{aligned} \Big\} = e^{-2s} \sum_k \frac{s^{k+1}}{(k+1)!} I_{2k}, \quad n \neq p, \quad (60)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} A_{nn} \\ F_{nn} \end{aligned} \Big\} = e^{-2s} \sum_k \frac{s^k}{k!} F_{2k+1}, \quad (61)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} B_{pn} \\ G_{pn} \end{aligned} \Big\} = e^{-2s} \sum_k \frac{s^k}{k!} \left(\frac{s}{k+1} - \frac{1}{2} \right) I_{2k}, \quad n \neq p, \quad (62)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} B_{nn} \\ G_{nn} \end{aligned} \Big\} = e^{-2s} \sum_k \frac{s^k}{k!} \left(F_{2k+1} - \frac{1}{2} F_{2k+3} \right), \quad (63)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} C_{pn} \\ E_{pn} \end{aligned} \Big\} = e^{-2s} \sum_k \frac{s^k}{k!} K_{2k}, \quad n \neq p, \quad (64)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} C_{nn} \\ E_{nn} \end{aligned} \Big\} = e^{-2s} \sum_k \frac{s^{k+1}}{(k+1)!} G_{2k+4}, \quad (65)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

Hierin bedeuten

$$I_{2k} = (k+1) I_0 \vartheta_0^{2k} \left\{ 1 - \frac{(2k+1)(y_n^2 + y_p^2)}{y_n y_p \vartheta_0^{2k+2} P_{pn}} \left[I_{2k-2} + \frac{4k(k^2-1)\vartheta_0^2}{(2k+1)(y_n^2 + y_p^2)} I_{2k-4} \right] \right\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (66)$$

$$F_{2k+1} = \frac{\vartheta_0^{2k+2}}{2(2k+1)} P_{nn} \left[1 - \frac{4k(k^2-1)}{y_n^2 \vartheta_0^{2k} P_{nn}} F_{2k-1} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (67)$$

$$\begin{aligned} K_{2k} = \frac{y_p \vartheta_0^{2k+3}}{y_n^2 - y_p^2} P_{pn} \left\{ 1 - \frac{4k(2k+1)(k-1)}{(2k-1)(y_n^2 - y_p^2)} \times \right. \\ \times \left. \left[1 + 2 \frac{2k^2(y_n^2 + y_p^2) - y_p^2}{(2k+1)(k-1)y_p \vartheta_0^{2k+1} P_{pn}} \left(K_{2k-2} + \frac{2k(2k+1)(k-1)^2 \vartheta_0^2}{2k^2(y_n^2 + y_p^2) - y_p^2} K_{2k-4} \right) \right] \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (68)$$

$$G_{2k} = -\frac{(k-1)\vartheta_0}{y_n} F_{2k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (69)$$

$$I_0 = \frac{4y_n y_p \vartheta_0^4}{(y_n^2 - y_p^2)^2} P_{pn}, \quad (70)$$

$$P_{pn} = J_0(y_p) J_0(y_n). \quad (71)$$

3.2. Näherungen für die Feldwellenwiderstände im Kegel bei kleinem Öffnungswinkel

Bei $\sin \vartheta_0 \approx \vartheta_0$ ist $\beta_0 r \approx \beta_0 \varrho_0 / \vartheta_0$ und wegen $y_p \geq 3,83$ nach Gl. (33)

$$\eta \approx y_p / \vartheta_0. \quad (72)$$

$$\text{Bei } \eta \gg 1 \text{ und } \beta_0 r \gg 1 \quad (73)$$

ergeben sich dann nach Einsetzen der asymptotischen Reihen von DEBYE [11], S. 33 für die Hankelschen Funktionen in Gl. (1) folgende Näherungen für die Feldwellenwiderstände im Kegel ($n = p$):

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{Z_p}{Z_{p^2}^{(2)}} \approx 1 + \frac{(\beta_0 \varrho_0)^4}{8(\beta_p \varrho_0)^6} \times \\ \times \left[1 + 4 \left(\frac{y_p}{\beta_0 \varrho_0} \right)^2 \right] \vartheta_0^2 - j \frac{y_p^2}{2(\beta_p \varrho_0)^3} \vartheta_0, \end{aligned} \quad (74)$$

$$Z_p = \frac{Z_0 \beta_0}{\beta_p} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{y_p}{\beta_0 \varrho_0} \right)^2}}, \quad (75)$$

$$\text{wenn } y_p < \beta_0 \varrho_0, \quad (76)$$

$$\frac{\beta_0 \varrho_0}{y_p} - 1 > 3 \left(\frac{\vartheta_0}{y_p} \right)^{2/3}. \quad (77)$$

$$2) \quad Z_{p^2}^{(2)} \approx Z_p = j \frac{Z_0}{\sqrt{\left(\frac{y_p}{\beta_0 \varrho_0} \right)^2 - 1}}, \quad (78)$$

$$\text{wenn } y_p > \beta_0 \varrho_0, \quad (79)$$

$$\left| y_p^2 - (\beta_0 \varrho_0)^2 \right|^{1/2} \gg \vartheta_0. \quad (80)$$

$$3) \quad Z_{p^2}^{(2)} \approx 1,089 Z_0 \sqrt[3]{\beta_0 \varrho_0 / \vartheta_0} \exp j \frac{\pi}{6}, \quad (81)$$

$$\text{wenn } y_p \approx \beta_0 \varrho_0, \quad (82)$$

$$\left| y_p - \beta_0 \varrho_0 \right| \ll \vartheta_0 \sqrt[3]{\beta_0 \varrho_0 / \vartheta_0}. \quad (83)$$

Gl. (74) entspricht dem Feldwellenwiderstand im runden Hohlleiter bei fortschreitenden Wellen, Gl. (78) dem bei statisch gedämpften Feldern, Gl. (81) dem bei der Grenzfrequenz.

4. Näherungen für die Reflexions- und Durchlaßkoeffizienten bei Einfall einer H_{01} -Welle

4.1. Näherungen für die Reflexionskoeffizienten bei unendlich langem Übergang

Die Größen r_n sind die Reflexionskoeffizienten der H_{0n} -Wellen an der Stelle $z = 0$ bzw. $r = 0$. Die Reflexionskoeffizienten an der Stelle $z_0 = r_0 \cos \vartheta_0$ sind dann

$$r_{n0} = r_n e^{j2\beta_n^{(1)} r_0 \cos \vartheta_0}. \quad (84)$$

Unter Benutzung von Gl. (39) und (40) ergibt sich die erste Näherung von r_1 aus Gl. (56) zu

$$\begin{aligned} r_1 &\approx -\frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}} = \\ &= -\frac{A_{11}^*}{A_{11}} \frac{\frac{Z_1^{(1)}}{Z_{12}^{(2)}(r_0)} - \frac{B_{11}^*}{A_{11}^*} - j \frac{y_1}{\beta_1^{(1)} a} \frac{C_{11}^*}{A_{11}^*}}{\frac{Z_1^{(1)}}{Z_{12}^{(2)}(r_0)} + \frac{B_{11}}{A_{11}} - j \frac{y_1}{\beta_1^{(1)} a} \frac{C_{11}}{A_{11}}}. \end{aligned} \quad (85)$$

Bei der Berechnung der r_n aus Gl. (56) ergibt sich, daß eine gute Näherung für Gl. (56) das Gleichungssystem

$$\alpha_{p1} = -\sum_{n=1}^p r_n \beta_{pn}, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (86)$$

ist.

4.2. Das Gleichungssystem bei einfallender H_{01} -Welle und kleinem Öffnungswinkel des Kegels ($\vartheta_0 \ll 1$)

Es ist $N = 1$. Im Hohlleiter mit dem Radius a soll nur die einfallende H_{01} -Welle existenzfähig sein, d. h.

$$\beta_0 a \leq y_2 = 7,016, \quad (87)$$

$$\beta_0 r_0 < \eta \approx y_p / \vartheta_0, \quad p = 2, 3, 4, \dots \quad (88)$$

Wegen $\vartheta_0 \ll 1$ gilt Ungl. (73). Wegen Gl. (78) ist dann an der Stelle $r = r_0$, also $\varrho_0 = a$

$$Z_{p2}^{(2)} \approx -Z_{p1}^{(2)}, \quad p = 2, 3, 4, \dots \quad (89)$$

und damit nach den Gl. (47) und (48)

$$\left. \begin{array}{l} S_p \\ T_p \end{array} \right\} \approx 0, \quad p = 2, 3, 4, \dots \quad (90)$$

Wegen Gl. (90) ergibt sich aus den Gl. (39), (40) und (42), (43)

$$\alpha_{p1} + d_{p1} \approx 2\alpha_{p1} = 2\alpha_{p1}, \quad (91)$$

$$b_{pn} + e_{pn} \approx 2b_{pn} = 2\beta_{pn}, \quad p = 2, 3, 4, \dots \quad (92)$$

Wenn nun außerdem im Hohlleiter mit dem Radius b für alle zu berechnenden Wellentypen

$$\beta_0 b \gg y_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (93)$$

ist, darf man in Gl. (44) den Summand mit dem Faktor E_{pn} gegen G_{pn} vernachlässigen. Unter Berücksichtigung von Gl. (90) und (93) ergibt sich dann

$$r_n(b_{pn} + e_{pn}) \geq t_n(f_{pn} - c_{pn}), \quad p = 2, 3, 4, \dots \quad (94)$$

Nach Einsetzen der Gl. (91) und (92) in das Gleichungssystem (38) und Beachtung der Ungl. (94)

erhält man dann durch Subtraktion und Addition

$$a_{11} = -\sum_{n=1}^{\infty} (r_n b_{1n} - t_n c_{1n}), \quad (95)$$

$$d_{11} = -\sum_{n=1}^{\infty} (r_n e_{1n} + t_n f_{1n}), \quad (96)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{p1} &= -\sum_{n=1}^{\infty} r_n \beta_{pn}, \quad p = 2, 3, 4, \dots, \\ h_{p1} &= \sum_{n=1}^{\infty} t_n g_{pn}, \quad p = 2, 3, 4, \dots. \end{aligned} \quad (97)$$

Hierin bedeuten

$$h_{p1} = A_{p1}^* \sqrt{\frac{b}{a} \frac{H_{\eta}^{(2)}(\beta_0 R_0)}{H_{\eta}^{(2)}(\beta_0 r_0)}}, \quad (98)$$

$$g_{pn} = \frac{y_n}{y_1} F_{pn}. \quad (99)$$

Die Gl. (95) bis (97) bedeuten physikalisch die Vernachlässigung der reflektierten H_{0n} -Wellen ($n = 2, 3, 4, \dots$) an der Stelle $r = R_0$. Aus den Gl. (96) und (97) darf man also nicht die Durchlaßkoeffizienten t_n für die Wellen berechnen, deren Grenzfrequenzen im Hohlleiter mit dem Radius b in der Nähe der Betriebsfrequenz liegen ($\beta_0 b \approx y_n$). Denn in diesem Fall müssen die Reflexionskoeffizienten an der Stelle $r = R_0$ berücksichtigt werden und es darf der Summand mit dem Faktor E_{pn} nicht vernachlässigt werden. Setzt man in Gl. (95) $T_p = S_p = 0$, so ergibt sich aus Gl. (95) und (96) die Gl. (56). Gl. (97) gilt auch für $p = 1$, wenn $r_n = 0$ gesetzt wird.

4.3. Näherungen für die Durchlaßkoeffizienten t_n bei endlich langem Übergang

Es sei $\vartheta_0 \ll 1$. Die Reflexion an den Stellen $r = r_0$ und $r = R_0$ kann daher vernachlässigt werden. Demnach berechnen sich die t_n aus Gl. (97), die in diesem Fall auch für $p = 1$ gilt. Nach Einsetzen von Gl. (98) und (99) ergibt sich dann für t_1 als erste Näherung

$$t_1 = \frac{h_{11}}{g_{11}} = \sqrt{\frac{b}{a} \frac{A_{11}^*}{F_{11}} \frac{H_{\eta}^{(2)}(\beta_0 R_0)}{H_{\eta}^{(2)}(\beta_0 r_0)}}. \quad (100)$$

$$\text{Bei } \beta_0 a \gg y_1, \quad \frac{\beta_1^{(3)} b \vartheta_0}{6} \ll 1 \quad (101), (102)$$

genügt es, für die Hankelsche Funktion die Debye-Sche Reihe für $\eta < \beta_0 r_0$ nach [11] S. 33 und die zweite Näherung von Gl. (61) in Gl. (100) einzusetzen, so daß sich ergibt

$$\begin{aligned} t_1 &\approx \exp j[R_0(\beta_1^{(3)} - \beta_0) - r_0(\beta_1^{(1)} - \beta_0) - \\ &\quad - \frac{\vartheta_0}{6}(\beta_1^{(3)} b - \beta_1^{(1)} a)]. \end{aligned} \quad (103)$$

Bei sehr hohen Frequenzen ist $\beta_1^{(3)} \approx \beta_1^{(1)} \approx \beta_0$, und es wird

$$t_1 \approx \exp -j \left[\frac{\beta_0 b \vartheta_0}{6} \left(1 - \frac{a}{b} \right) \right]. \quad (104)$$

Es sei weiterhin $b/a \gg 1$ und im Hohlleiter mit dem Radius a nur die H_{01} -Welle existenzfähig. An der Stelle $r = R_0$ wird dann praktisch nur die H_{01} -Welle ankommen. Denn die an der Stelle $r = r_0$ erzeugten höheren Wellentypen werden wegen $\vartheta_0 \ll 1$, $\beta_0 a < y_2$, $b/a \gg 1$ in Wirklichkeit durch die Verluste im Übergangsstück besonders in der Nähe von $r = r_0$ stark gedämpft. Aus Gl. (97) wird dann

$$h_{p1} \approx 0 = \sum_{n=1}^{\infty} t_n g_{pn}, \quad p = 2, 3, 4, \dots \quad (105)$$

Im runden Hohlleiter mit dem Radius b ist die Energie der höheren Wellentypen klein gegenüber der Energie der Grundwelle. Man braucht daher in Gl. (105) nur die Glieder mit $n = 1$ und $n = p$ zu berücksichtigen und erhält bei Benutzung von Gl. (99)

$$t_n = -t_1 \frac{y_1}{y_n} \frac{F_{n1}}{F_{nn}}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (106)$$

Bei Benutzung von Gl. (30) ist mit $t_q = t_n$ die Leistung der H_{0n} -Welle im Hohlleiter mit dem Radius b

$$P_n = \frac{\pi}{2} |t_n|^2 \frac{y_n^2 a^2}{Z_n^{(3)}} [J_0(y_n)]^2 E_0^2, \quad (107)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Wenn keine Reflexion stattfindet und keine höheren Wellentypen angeregt werden, ist die gesamte Leistung in der H_{01} -Welle enthalten, und es ist genau $|t_1| = 1$. Demnach muß bei Vernachlässigung der Reflexion die gesamte Leistung aller Wellentypen im Hohlleiter mit dem Radius b

$$P_g = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \frac{\pi}{2} \frac{y_1^2 a^2}{Z_1^{(3)}} [J_0(y_1)]^2 E_0^2 \quad (108)$$

und natürlich

$$P_1 = P_g - \sum_{n=2}^{\infty} P_n \quad (109)$$

sein.

Erklärung der Formelzeichen

- ρ, φ, z Zylinderkoordinaten,
- r, ϑ, φ Kugelkoordinaten,
- a Innenradius des an kommenden Hohlleiters,
- b Innenradius des ab gehenden Hohlleiters,
- r_0 Ort der Trennfläche zwischen an kommendem Hohlleiter und Kegel bei Kugelkoordinaten (siehe Bild 2),
- R_0 Ort der Trennfläche zwischen Kegel und ab gehendem Hohlleiter bei Kugelkoordinaten (siehe Bild 2),
- z_0 Ort der Trennfläche zwischen an kommendem Hohlleiter und Kegel bei Zylinderkoordinaten (siehe Bild 2),
- ϱ_0 halber innerer Durchmesser des Kegels (siehe Bild 2),
- ϑ_0 halber Öffnungswinkel des Kegels,
- $\beta_0 = 2\pi/\lambda_0$ Phasenkonstante der ebenen Welle im leeren Raum,
- λ_0 Wellenlänge der ebenen Welle im leeren Raum,
- λ_c Grenzwellenlänge der H_{01} -Welle im runden Hohlleiter mit dem Radius a ,

μ_0	Permeabilität des leeren Raumes,
ε_0	Dielektrizitätskonstante des leeren Raumes,
$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$	Feldwellenwiderstand des leeren Raumes,
J_0	Besselsche Funktion nullter Ordnung,
J_1	Besselsche Funktion erster Ordnung,
$H_{\eta}^{(1)}$	Hankelsche Funktion erster Art der Ordnung η ,
$H_{\eta}^{(2)}$	Hankelsche Funktion zweiter Art der Ordnung η ,
$y_n = n\text{-te}$	nicht verschwindende Wurzel von J_1
$y_q = q\text{-te}$	
$y_p = p\text{-te}$	$n, q, p = 1, 2, 3, \dots$
$\beta_p = \begin{cases} \beta_0 \sqrt{1 - (y_p/\beta_0 \varrho_0)^2} & \text{für } y_p < \beta_0 \varrho_0 \\ -j\beta_0 \sqrt{(y_p/\beta_0 \varrho_0)^2 - 1} & \text{für } y_p > \beta_0 \varrho_0 \end{cases}, p = 1, 2, 3, \dots$	
$\beta_p^{(1)}$	ergibt sich aus β_p , wenn $p = n$ und $\varrho_0 = a$ gesetzt wird,
$\beta_p^{(3)}$	ergibt sich aus β_p , wenn $p = q$ und $\varrho_0 = b$ gesetzt wird,
$Z_n^{(1)} = Z_0 \beta_0 / \beta_n^{(1)}$	Feldwellenwiderstand der H_{0n} -Welle im Hohlleiter mit dem Radius a ($n = 1, 2, 3, \dots$),
$Z_q^{(3)} = Z_0 \beta_0 / \beta_q^{(3)}$	Feldwellenwiderstand der H_{0q} -Welle im Hohlleiter mit dem Radius b ($q = 1, 2, 3, \dots$),
$Z_{p2}^{(2)} - Z_{p2}^{(2)}(r)$	Feldwellenwiderstand der in Richtung wachsender r fortschreitenden H_{0p} -Welle im Kegel an der Stelle r ($p = 1, 2, 3, \dots$),
$Z_{p1}^{(2)} - Z_{p1}^{(2)}(r)$	Feldwellenwiderstand der in Richtung abnehmender r fortschreitenden H_{0p} -Welle im Kegel an der Stelle r ($p = 1, 2, 3, \dots$),
t_n	Reflexionskoeffizienten im Hohlleiter mit dem Radius a ($n = 1, 2, 3, \dots$),
r_{n0}	Reflexionskoeffizienten im Hohlleiter mit dem Radius a an der Stelle $z = z_0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$),
t_n	Transmissionskoeffizienten im Hohlleiter mit dem Radius b ($n, q = 1, 2, 3, \dots$),
t_q	

Schriftum

- [1] UNGER, H. G., Circular waveguide taper of improved design. Bell Syst. tech. J. **37** [1958], 899–912.
- [2] ANDREASEN, M. G., Stetige Übergänge für H_{01} -Welle mit besonderer Berücksichtigung des konischen Übergangs. Acta Polytechnica Scandinavica, El 4 (254/1959).
- [3] ANDREASEN, M. G., Kurze Übergänge für H_{01} -Welle. Acta Polytechnica Scandinavica, El 3 (253/1959).
- [4] TANAKA, K., Mode conversions through the tapered section of circular waveguide system. Onde élect. **38** [1958], Supplément spécial, 63–72.
- [5] KATZNELSONBAUM, B. Z., On the theory of non uniform waveguides with slowly changing parameters. Onde élect. **38** [1958], Supplément spécial, 124–127.
- [6] SCHNETZLER, K., Die Reflexion der Grundwelle an den Knickstellen eines Hohlleiters, insbesondere bei einem stetigen Übergang von einem rechteckigen auf einen runden Hohlleiter. A.E.U. **14** [1960], 177–182.
- [7] SOLYMAR, L., Monotonic multi-section tapers for over-moded circular waveguides. Proc. Inst. Elect. Engrs (B), **106** [1959], Supplément Nr. 13, 121–128.
- [8] PIEFKE, G., Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Pyramidentrichter. Z. angew. Phys. **6** [1954], 499–507.
- [9] KLEINWÄCHTER, H., Die Wellenausbreitung in zylindrischen Hohlleitern und die Hertzsche Lösung als Sonderfälle der Wellenausbreitung in trichterförmigen Hohlleitern. A.E.U. **5** [1951], 231–236.
- [10] STRAUBEL, R., Unbestimmte Integrale mit Produkten von Zylinderfunktionen (II. Mitteilung). Ingenieur-Archiv **13** [1942], 14–20.
- [11] MAGNUS, W., und OBERHETTINGER, F., Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik; 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin 1948.
- [12] PIEFKE, G., Reflexion beim Übergang vom Rechteck-Hohlleiter zum Sektor-Horn. A.E.U. **11** [1957], 123–135.

Zur Frage der Fehlerfortpflanzung und Sicherheit bei der Übermittlung von Nachrichten unter Verwendung von elektronischen Analogrechnern zur Rückrechnung

von KLAUS LÖHN, HANS WEINERTH und HANS WOLTER

Mitteilung aus dem Institut für angewandte Physik der Universität Marburg (Lahn)

(A.E.Ü. 15 [1961], 455–466; eingegangen am 6. Juni 1961)

DK 621.391

Nachrichten, die einen Nachrichtenkanal geringer Bandbreite durchlaufen haben, sind mit einem systematischen Verschleifungsfehler behaftet. Dieser kann durch Rückrechnung mit einem elektronischen Analogrechner am Kanalausgang verkleinert werden (wie in vorausgegangenen Arbeiten gezeigt wurde). In der vorliegenden Untersuchung werden das Verhalten und die Fortpflanzung des systematischen und des statistischen Fehlers (Rauschen) bei dieser Rückrechnung beschrieben. Die dazu unternommenen Rechnungen und Messungen beschränken sich auf den Typ der zweiwertigen Nachrichten (Standardnachrichten). Die Sicherheit der Übermittlung solcher Signale unter Verwendung der Rückrechnung wird untersucht. Die Ergebnisse bestätigen die von WOLTER früher geforderte Exponentialformel für die Sicherheit.

Signals that have passed a channel of small bandwidth are affected by a systematical rounding error. This error can be reduced by calculating back by an electronic analog computer at the end of the channel (as shown in previous papers). In the present paper the behaviour and the propagation of the systematical and statistical error (noise) in this calculation are described. The calculations and measurements carried out for this purpose are restricted to the single-step type signals (standardised in bits). The "dependability" in communicating these signals (by calculating back at the end of the channel) is studied and the results confirm the exponential function of the "dependability" postulated by WOLTER in an earlier paper.

1. Verbesserung der Nachrichtenübermittlung durch elektronische Analogrechner

Ziel der Informationstheorie der Nachrichtentechnik ist es, Begriffe zur quantitativen Erfassung des Übermittlungsvorgangs aufzustellen und mit ihnen Bemessungsregeln zur optimalen Nachrichtenübermittlung abzuleiten. Für diese Bemessung gibt es zwei Angriffspunkte, die Auswahl der *Nachricht* für eine möglichst gute Übertragung und die optimale Dimensionierung der Elemente des *Übertragungsweges*.

Wie WOLTER gezeigt hat [1], ist die aus „Bits“ der Länge τ aufgebaute Standardnachricht nach Bild 1



Bild 1. Beispiel einer Standardnachricht.

vor allen anderen Nachrichtentypen wegen ihrer geringen Störanfälligkeit ausgezeichnet. Die vorliegende Untersuchung soll daher nur von Standardnachrichten handeln. Gibt man eine solche Nachricht auf den Eingang eines Übertragungsweges, so kann durch Mängel der Übertragung eine Informationsminderung eintreten, d. h. einzelne Bits werden am Ausgang falsch erkannt. Die Sicherheit [1]

$$S = \frac{\text{Anzahl der richtig erkannten Bits}}{\text{Anzahl der übertragenen Bits}}$$

ist damit das geeignete Maß für die Güte einer Übertragung von Standardnachrichten. Die Nachricht am Ausgang wird um so schlechter erkennbar sein, je unähnlicher sie dem Originalsignal ist. Mit ande-

ren Worten: je größer der Hilbertabstand (Fehler) zwischen beiden ist, um so kleiner wird die Sicherheit der Übermittlung sein. Sowohl das Verhalten der Fehler wie der Sicherheit bei Übertragung von Standardnachrichten soll untersucht werden.

Als Hauptursache für die Verfälschung der Nachricht soll im Rahmen dieser Untersuchung die Verschleifung (Verrundung) infolge endlicher Bandbreite des Kanals angesehen werden. Die daneben vorhandenen unvermeidlichen statistischen Störungen führen zu weiteren Fehlern und werden zur eigentlichen Begrenzung der Informationsübertragung.

WOLTER hat in [2] gezeigt, daß bei vorgegebener Nachricht und vorgegebenem Kanal der Verschleifungsfehler durch eine Rückrechnung verringert werden kann, da alle natürlichen Nachrichtenkanäle eine endliche Flankensteilheit der Übertragungsfunktion besitzen und diese in keinem Spektralbereich identisch verschwinden kann. Die Rückrechnung kann auch elektronisch durch ein geeignetes Anheben der höheren Frequenzgebiete direkt hinter dem Nachrichtenkanal durchgeführt werden. Bild 2 zeigt schematisch die Anordnung des Rechengeräts. In den Nachrichtenkanal mit der Übertragung

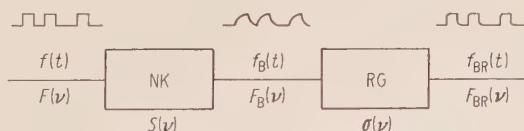


Bild 2. Die Rückrechnung des Signals durch ein elektronisches Rechengerät;
NK Nachrichtenkanal,
RG Rechengerät.

gungsfunktion $S(\nu)$ tritt das Signal $f(t)$ ein, wird dort verfälscht und tritt als $f_B(t)$ wieder aus. Die Verknüpfung der zugehörigen Fouriertransformierten ist

$$F_B(\nu) = S(\nu) F(\nu), \quad (1)$$

die der Zeitfunktionen

$$f_B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') s(t-t') dt' \quad (2)$$

mit $s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu.$

Da $S(\nu)$ nirgends identisch verschwindet, ist die Auflösung von Gl. (1),

$$F(\nu) = F_B(\nu)/S(\nu),$$

prinzipiell möglich. Da $1/S(\nu)$ für $\nu \rightarrow \infty$ über alle Grenzen wächst, ist diese für die Rückrechnung benötigte Funktion nur näherungsweise realisierbar:

$$\sigma(\nu) = \frac{G(\nu)}{S(\nu)} \approx \frac{1}{S(\nu)}. \quad (3)$$

Der Zähler $G(\nu)$ beschränkt das Anwachsen der Rechengerät-Übertragungsfunktion und ist die resultierende Übertragungsfunktion für die Hintereinanderschaltung von Nachrichtenkanal und Rechengerät,

$$G(\nu) = S(\nu) \sigma(\nu). \quad (4)$$

Für einen zweistufigen RC -Verstärker, dessen untere Bandgrenze vernachlässigbar ist, erhält man die Übertragungsfunktion

$$S(\nu) = \frac{1}{(1 + i\nu\tau_1)^2}. \quad (5)$$

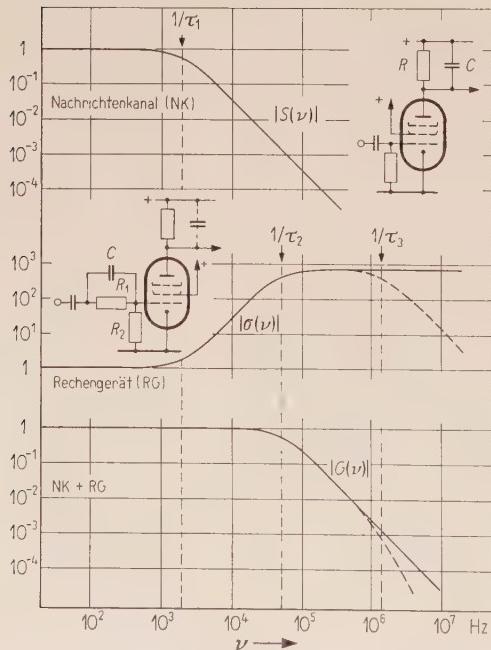


Bild 3. Frequenzgänge bei einer Nachrichtenübertragung mit elektronischer Rückrechnung (zweistufiger RC -Verstärker).

Eine zur Rückrechnung geeignete Bandfunktion für das Rechengerät ist

$$\sigma(\nu) = \frac{(1 + i\nu\tau_1)^2}{(1 + i\nu\tau_2)^2}. \quad (6)$$

τ_2 ist in Grenzen, die durch die Aussteuerungsfähigkeit der Anlage gegeben sind, frei wählbar. Die Hintereinanderschaltung

$$G(\nu) = \frac{1}{(1 + i\nu\tau_2)^2} \quad (7)$$

stellt wieder einen zweistufigen Verstärker dar, dessen Grenzfrequenz gegenüber der des Nachrichtenkanals um einen Faktor

$$g = \tau_1/\tau_2$$

hinausgeschoben ist. Bild 3 zeigt die Beträge der Übertragungsfunktionen $S(\nu)$, $G(\nu)$, $\sigma(\nu)$ und die zugehörigen Prinzipschaltungen.

2. Fehlerfortpflanzung

2.1. Fortpflanzung des Verschleifungsfehlers

Bei einem s -stufigen Nachrichtenkanal der im Abschnitt 1 beschriebenen Art erhält man nach der Rückrechnung die Übertragungsfunktion

$$G_s(\nu) = \frac{1}{(1 + i\nu\tau_2)^s}. \quad (8)$$

Die dieser Frequenzfunktion durch die Fouriertransformation zugeordnete charakteristische Zeitfunktion soll $g_s(t)$ genannt werden und lautet

$$g_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_s(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu, \quad (9)$$

$$g_s(t) = \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{2\pi}{\tau_2} \right)^s t^{s-1} e^{-2\pi t/\tau_2} D(t). \quad (10)$$

Die Formel (10) gewinnt man durch partielle Integration und Rekursion aus den Formeln (8) und (9). Die Standardsignale, die übertragen werden sollen, kann man sich aus Stufenfunktionen von der Art

$$D(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } t = 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad (11)$$

aufgebaut denken. Nach den Faltungssätzen der Fouriertheorie erhält man als Ausgangsfunktion des s -stufigen Kanals daraus

$$D_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} D(t') g_s(t-t') dt', \quad (12)$$

$$D_s(t) = \left\{ 1 - e^{-2\pi t/\tau_2} \left[1 + \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{2\pi t}{\tau_2} \right)^k \right] \right\} D(t). \quad (13)$$

Der Fehler allgemeiner statistischer, aus solchen Sprüngen aufgebauten Nachrichten lässt sich im allgemeinen nicht geschlossen angeben. Bild 4 zeigt eine statistische Standardnachricht am Ausgang eines zweistufigen Nachrichtenkanals mit einer

durch Messung gewonnenen Fehlerkurve und den charakteristischen Verschleifungszuständen an einzelnen Punkten der Kurve.

Die Oszillogramme zeigen (von oben nach unten) die Originalnachricht, die verschliffene Nachricht am Kanalausgang und die Differenz zwischen diesen beiden Funktionen, deren Quadrat der Integrand des Zählerintegrals des relativen Hilbertabstands

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [f(t) - f_B(t)]^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt} \quad (14)$$

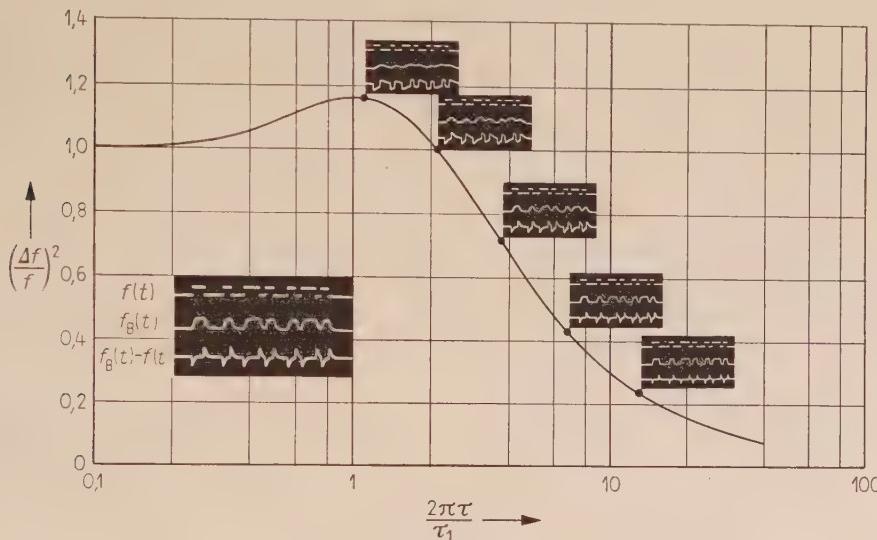


Bild 4. Gestalt der verschliffenen Signalfunktion $f_B(t)$ und der Differenzfunktion $f_B(t) - f(t)$ an einzelnen Punkten der Fehlerkurve.

ist. Diese Differenz ist zwar im allgemeinen Fall von der speziellen Struktur des gegebenen Signals abhängig, für kleine Fehler aber klingt die Differenzfunktion in jedem τ -Intervall praktisch auf Null ab und zerfällt so in einzelne Kurvenstücke, die überall gleiche Gestalt besitzen und jeweils nach einem Sprung der Originalfunktion auftreten.

In diesem Gebiet kleiner Fehler kann man eine Näherung angeben, die sich aus drei Anteilen zusammensetzt:

1. dem absoluten Fehler eines Einzelsprunges,
2. der relativen Häufigkeit solcher Sprünge,
3. der Norm der Standardnachricht

$$\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt, \quad T \gg \tau. \quad (15)$$

Die Nachricht soll dabei als gleichspannungsfrei angenommen werden, d. h. es soll

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0, \quad T \gg \tau \quad (16)$$

sein. Die Norm der Standardnachricht ist unter dieser Bedingung ein Maß für die relative Häufigkeit

$$k = n/N \quad (N \text{ Länge der Nachricht}) \quad (17)$$

des Wertes eins in der Nachricht. Der absolute Fehler des Einzelsprunges ergibt sich mit Gl. (13) zu

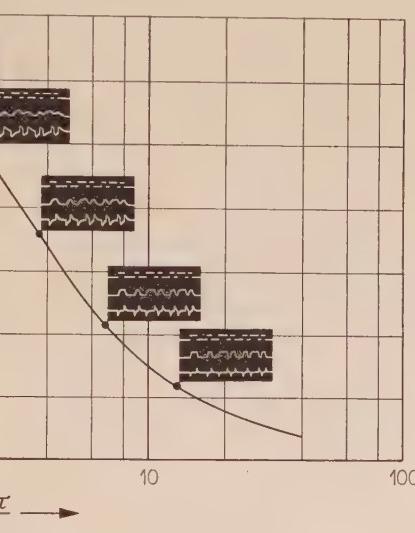
$$(\Delta f)^2 = \frac{\tau_2}{4\pi} \left[\sum_{\mu=0}^{s-1} \sum_{\nu=0}^{s-1} \binom{\mu+\nu}{\nu} \frac{1}{2^{\mu+\nu}} \right]. \quad (18)$$

Ist die relative Anzahl der Sprünge in der Nachricht

$$l = m/N, \quad (19)$$

so ergibt sich als Näherung für kleine Fehler der Hilbertabstand

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 = \frac{\tau_2}{4\pi\tau} \left[\sum_{\mu=0}^{s-1} \sum_{\nu=0}^{s-1} \binom{\mu+\nu}{\nu} \frac{1}{2^{\mu+\nu}} \right] \frac{k^2}{k-1} l. \quad (20)$$



Für einfache, z. B. periodische Signale, lassen sich die Fehlerkurven in ihrem ganzen Verlauf streng angeben, wie in [3] für verschiedene Kanalstufenzahlen gezeigt ist. Mit solchen periodischen Signalen wurde auch die Messung durchgeführt, die in Bild 5

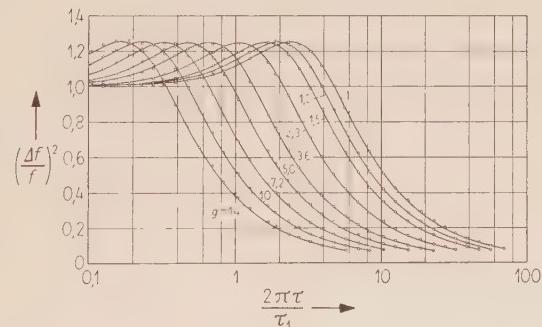


Bild 5. Verschleifungsfehler ($k = 2$) symmetrischer Rechtecke, gemessen in Abhängigkeit von der Zeitkonstante τ_1 des Nachrichtenkanals bei verschiedenen Rückrechenfaktoren g .

dargestellt ist. In ihr wurde die Abhängigkeit des Fehlers von der Zeitkonstante τ_1 des Kanals für verschiedene Rückrechenfaktoren g aufgenommen.

Jeder vertikale Schnitt durch das Feld des Bildes 5 gibt die Fortpflanzung des Verschleifungsfehlers mit dem Rückrechenfaktor g wieder; infolge der einfachen Parallelverschiebung der Kurven gleicht ein solcher Schnitt einer Kurve der Schar. Hierin drückt sich noch einmal aus, daß eine Rückrechnung um den Faktor g einer Bandbreitenvergrößerung um den gleichen Faktor äquivalent ist.

2.2. Fortpflanzung des Rauschfehlers

Die Fehlerkurven des Abschnittes 2.1 zeigen, daß man mit Hilfe der Rückrechnung jeden vorliegenden Fehler beliebig verkleinern kann. Dies gilt aber nur, wenn man das unvermeidliche Rauschen des Nachrichtenkanals und des Rechengeräts vernachlässigt. Dieses Rauschen wird durch das Vergrößern der Bandbreite beim Rückrechnen anwachsen und den Hilbertabstand zwischen Ausgangssignal und Original wieder vergrößern. Durch diese Gegenläufigkeit von Verschleifungs- und Rauschfehler wird sich bei einem bestimmten Rückrechenfaktor g ein Optimum ergeben, bei dem der Gesamtfehler minimal wird.

Der durch das Eingangsrauschen des Nachrichtenkanals am Kanalausgang auftretende Fehler läßt sich ebenso wie der Verschleifungsfehler durch Betrachtung des Gesamtfrequenzganges $G_s(\nu)$ erfassen (Gl. (8)). Dieser Fehler ist gleich der Rauschleistung am Rechengerätausgang, wenn man die Signalleistung auf eins normiert. Damit ist er vom Signal nur noch über diese Normierung abhängig:

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 = \frac{\text{Rauschleistung}}{\text{Signalleistung}} = \frac{N_R}{N_S}. \quad (21)$$

Zur Vermeidung von Konvergenzschwierigkeiten nimmt man an, daß der Kanal zur Zeit 0 eingeschaltet und nach Verlauf der Zeit T wieder ausgeschaltet wird. Die mittlere Rauschleistung ist als

$$N_R = \frac{1}{T} \int_0^T [\varphi(t)]^2 dt \quad (22)$$

definiert, wobei $\varphi(t)$ die Zeitfunktion der Störung darstellt. Da das Rauschen vor der Zeit 0 und nach der Zeit T verschwinden soll, kann das Integral auch über die ganze t -Achse erstreckt werden und somit ist das Theorem von PLANCHEREL anwendbar:

$$N_R = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\nu)|^2 d\nu \quad (23)$$

$$\text{mit } \Phi(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt. \quad (24)$$

Die Spektralverteilung des aus dem Nachrichtenkanal austretenden Rauschens ist

$$\Phi_B(\nu) = \Phi(\nu) G_s(\nu). \quad (25)$$

Die Rauschleistung ergibt sich daher als das Integral

$$N_R = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\nu)|^2 |G_s(\nu)|^2 d\nu. \quad (26)$$

Ist das Rauschen am Kanaleingang weiß, so gilt

$$\frac{1}{T} |\Phi(\nu)|^2 = n_R = \text{const.} \quad (27)$$

n_R heißt spektrale Rauschleistungsdichte. Bei weißem Rauschen reduziert sich also das Integral (26) zu einem Integral über die Funktion $|G_s(\nu)|^2$ und ergibt über eine Rekursionsformel

$$N_R = \frac{\pi n_R}{\tau_2} \quad \text{für } s = 1 \text{ (einstufig)}, \quad (28)$$

$$N_R = \frac{\pi n_R}{\tau_2} \prod_{l=2}^s \frac{2l-3}{2l-2} \quad \text{für } s = 2, 3, \dots \quad (29)$$

Die Rauschleistung ist also proportional zur Bandbreite $1/\tau_2$, proportional der Rauschleistungsdichte und einer Funktion der Kanalstufenzahl s . In doppelt-logarithmischer Darstellung wird Gl. (29) durch eine Gerade mit der Steigung 45° wiedergegeben, diese Gerade wird auch durch die Messung (Bild 6)

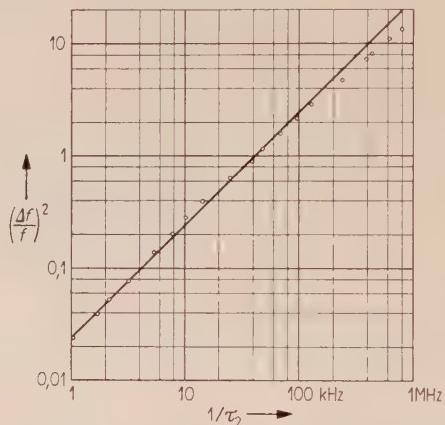


Bild 6. Störfehler durch weißes Rauschen am Kanaleingang. Sollkurve (Gerade) mit Meßwerten (Kreise). Willkürliche Normierung der Signalleistung.

bestätigt. Die Messung wurde an einem zweistufigen Nachrichtenkanal durchgeführt; der Bezugspunkt für den Fehler eins ist willkürlich normiert. Die Gerade in Bild 6 ist bei konstanter Rauschleistungsdichte n_R aufgenommen und ist damit ein einzelnes Element einer Geradenschar mit n_R/N_S als Parameter.

Für die Frage der Fehlerfortpflanzung ist die genaue Normierung der Kurve in Bild 6 ohnehin nicht sehr wichtig, da die Linearität der Kurve ein lineares Fortpflanzen des Fehlers mit dem Rückrechenfaktor ergibt:

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{\tau_2}^2 = g \left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{\tau_1}^2. \quad (30)$$

Im Gegensatz zum Verschleifungsfehler ist also die Fortpflanzung des Rauschfehlers explizit angebbar. Formel (29) zeigt aber, daß man bei Kenntnis der Rauschleistungsdichte — des äquivalenten Rauschwiderstandes o. ä. — diesen Fehler ebenso wie den Verschleifungsfehler direkt mit der Zeitkonstante τ_2 des gesamten Übertragungsweges berechnen kann, ohne daß man den Fehler am Kanalausgang oder sonstige Kanaldaten, wie etwa die Zeitkonstante τ_1 , zu kennen braucht.

Während das Eingangsrauschen des Nachrichtenkanals den gesamten Übertragungsweg durchläuft, ist die Übertragungsfunktion für das Eingangsrauschen des Rechengeräts

$$\sigma(\nu) = \frac{(1 + i\nu\tau_1)^s}{(1 + i\nu\tau_2)^s}. \quad (31)$$

Liegt am Eingang des Rechengeräts weißes Rauschen vor, so muß man in Analogie zum vorigen Abschnitt über das Betragsquadrat dieses Frequenzganges integrieren. Das Integral wird aber im eigentlichen Sinne nicht existieren, da der Integrand für $\nu \rightarrow \infty$ nicht verschwindet, sondern den konstanten Wert

$$\lim |\sigma(\nu)|^2 = \tau_1^{2s}/\tau_2^{2s} \quad (32)$$

annimmt. Es wird daher zweckmäßig sein, hier nicht mit weißem Rauschen zu arbeiten, sondern mit Rauschen der spektralen Verteilung

$$\frac{1}{T} |\Phi(\nu)|^2 = n_R \frac{1}{(1 + \nu^2 \tau_3^2)^s}, \quad (33)$$

einer Verteilung, die für $\nu \rightarrow \infty$ verschwindet. Später wird gezeigt werden, daß diese Voraussetzung für die Konstruktion von Rechengeräten durchaus sinnvoll ist. Es ergibt sich somit die Rauschleistung

$$N_R = n_R \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 + \nu^2 \tau_1^2)^s d\nu}{(1 + \nu^2 \tau_2^2)^s (1 + \nu^2 \tau_3^2)^s}. \quad (34)$$

Eine Messung für eine solche Kurvenschar ($s = 2$) mit τ_1/τ_3 als Parameter zeigt Bild 7. Der Bezug auf die Signalleistung ist hier wieder willkürlich (vgl. Bild 6).

In Bild 7 wurde zusätzlich die Kurve eingezeichnet, die sich als Verbindungsline der Punkte für $\tau_2 = \tau_3$ ergibt. Diese Kurve ist in der Form

$$N_R = \frac{\pi}{2 \tau_1} R(g) \quad (37)$$

darstellbar mit

$$R(g) = \frac{1}{2} g \left[1 + \frac{1}{4} (1 + g^2)^2 \right], \quad (38)$$

$$g = \tau_1/\tau_2.$$

Die Funktion $R(g)$ ist zum Vergleich der Messung mit der Theorie rechts neben dem Diagramm der Meßwerte aufgetragen. Der Fall $\tau_2 = \tau_3$ ist der wichtigste Spezialfall: Die Rauschleistung wächst, wie Formel (36) zeigt, stark mit dem Verhältnis τ_2/τ_3 . Es empfiehlt sich also, um die Störungen klein zu halten, τ_3 möglichst groß zu machen. Nun ist aber bei einem mit Röhren aufgebauten Analogrechner das Eingangsrauschen von Natur weiß, jedenfalls in den hier betrachteten Frequenzbereichen. Die Zeitkonstante τ_3 kann also nur im Analogrechner selbst eingefügt werden, wo sie durch die schädlichen Kapazitäten der Verstärkerstufen ohnehin gegeben ist. (Diese Zeitkonstante wurde schon in Bild 3 gestrichelt angegeben.) Hält man diese Zeitkonstante künstlich groß, so beeinflußt sie die

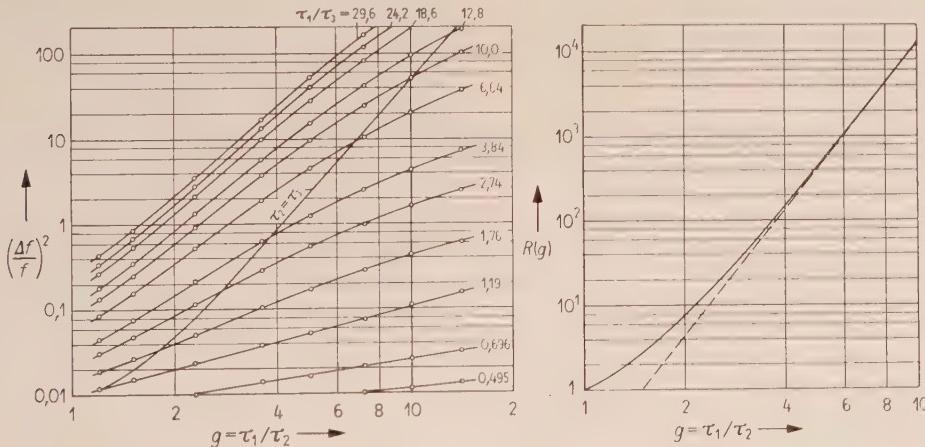


Bild 7. Störfehler durch nach oben im Frequenzband begrenztes Rauschen am Eingang des Rechengeräts, gemessen am Ausgang in Abhängigkeit vom Rückrechenfaktor g , eingezeichnet ist die Kurve für $\tau_2 = \tau_3$, daneben die Sollkurve in der richtigen Normierung.

Durch Auflösung dieser Integrale für Stufenzahlen $s = 1$ und 2 erhält man

$$n = 1: N_R = \frac{\pi n_R}{\tau_2 + \tau_3} \left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2} \frac{\tau_1}{\tau_3} \right), \quad (35)$$

$$n = 2: N_R = \frac{\pi n_R}{2(\tau_2 + \tau_3)} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{\tau_2 \tau_3}{(\tau_2 + \tau_3)^2} \left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2} \frac{\tau_1}{\tau_3} \right) \right]. \quad (36)$$

Rückrechnung, und der Gesamtübertragungsweg hat die Frequenzfunktion

$$G(\nu) = \frac{1}{(1 + i\nu\tau_2)^s (1 + i\nu\tau_3)^s}. \quad (39)$$

Da die Konstanten τ_2 und τ_3 in diesem Ausdruck gleichberechtigt auftreten, ist es nicht sinnvoll, $\tau_3 > \tau_2$ zu wählen, da die Zeitkonstanten dann ihre Rolle tauschen und die Rückrechnung wesentlich schlechter wird. Wählt man $\tau_2 = \tau_3$, so ist das Band

des Rauschens so weit wie möglich eingegengt, ohne daß wesentlich auf Genauigkeit der Rückrechnung verzichtet wird. Dabei gewinnt der s -stufige Verstärker die Charakteristik eines $2s$ -stufigen, aber gerade bei höheren Stufenzahlen ist der dadurch zusätzlich auftretende Verschleifungsfehler gering [3]. Die Funktion $R(g)$ der Formel (38) beschreibt direkt die Fortpflanzung des Eingangsrauschen des Rechengeräts mit zunehmendem Rückrechenfaktor g . Der bei $g = 1$ vorliegende Fehler ist beim Übergang zum Rückrechenfaktor $g > 1$ mit $R(g)$ zu multiplizieren. Die Funktion $R(g)$ geht schon für kleine g in ihre Asymptote über, d. h. in:

$$\hat{R}(g) = \frac{1}{2} g^3 \quad \text{für } n = 1, \quad (40)$$

$$\hat{R}(g) = \frac{1}{8} g^5 \quad \text{für } n = 2. \quad (41)$$

Durch diese hohen Potenzen wächst der Fehler sehr schnell mit g an und setzt daher der Rückrechnung eine scharfe Grenze, die aber durch sorgfältige Ausgestaltung des Rechners (Rauscharmut) hinausgeschoben werden kann. Bild 8a zeigt das Schirmbild eines Fernsehempfängers bei der direkten Übertragung einer Tiefdruckvorlage, Bild 8b das gleiche Bild am Ausgang eines Kanals mit 5 kHz Bandbreite und Bild 8c das mit einem Analogrechner bei $g = 500$ rückgerechnete Bild. Bild 8b wurde mit Zwangssynchronisation des Fernsehempfängers aufgenommen, um eine Zuordnung der einzelnen Bildstellen zu ermöglichen. Bild 8c ist in der Qualität zwar etwas schlechter als Bild 8a, aber trotz des hohen Rückrechenfaktors noch weitgehend rauschfrei (Belichtungszeit $1/25$ s, synchron mit Bildimpuls).

3. Experimentelle Durchführung

3.1. Fehlerfortpflanzungsmessung

Die im Abschnitt 2 angegebenen Meßkurven erstrecken sich über etwa drei Dekaden in der Frequenz. Als Arbeitsbereich wurde das Intervall 1 kHz bis 6 MHz festgelegt¹. Als Effektivwertmesser zur Bestimmung des Hilbertabstandes eignet sich für diesen Frequenzbereich ein Thermokreuz. Dieses wurde in den Brückenzweig einer Röhrenvoltmetterschaltung eingefügt, wobei der Einfluß der Raumtemperatur durch ein zweites Thermokreuz mit offenem Heizkreis kompensiert wurde. Mit diesem Meßgerät wurden die Integrale

$$\frac{1}{T} \int_0^T [f_{BR}(t) - f(t)]^2 dt \quad (42)$$

$$\text{und} \quad \frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt \quad (43)$$

gemessen und durch Quotientenbildung der relative Fehler $(\Delta f/f)^2$ bestimmt. Zur Kompensation der Verstärkung des Übertragungsweges (Nachrichtenkanal + Rechengerät) war ein breitbandiger Ver-

(a)



(b)



(c)



Bild 8. Rückrechnung eines Fernsehbildes.

- (a) Original direkt übertragen,
- (b) Bild am Ausgang eines zweistufigen Nachrichtenkanals mit 5 kHz Bandbreite,
- (c) mit $g = 500$ rückgerechnetes Bild.

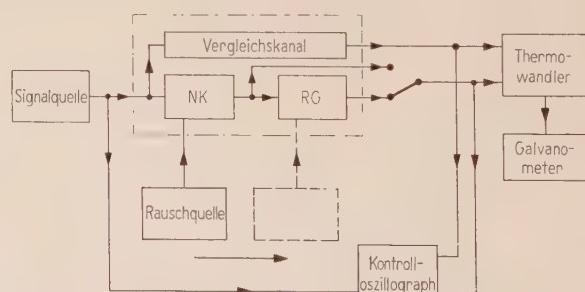


Bild 9. Blockschaltbild der Anordnung zur Messung des Hilbertabstandes; NK Nachrichtenkanal, RG Rechengerät.

¹ Untere Begrenzung durch Funkelrauschen, obere Begrenzung durch schädliche Kapazitäten.

gleichskanal notwendig. Als Rauschquelle diente eine Sättigungsdiode mit Wolframfaden (K81A), deren Schrotrauschen durch einen fünfstufigen Breitbandverstärker auf die nötige Amplitude gebracht wurde. Die Anordnung der beschriebenen Geräte zeigt Bild 9.

3.2. Sicherheitsmessung

Bei der Messung des Hilbertabstandes war es möglich, periodische Signale als Nachrichten zu verwenden, da die Redundanz des Signals keine Rolle spielte. Anders liegt der Fall bei der Bestimmung der Sicherheit nach Abschnitt 1,

$$S = \frac{\text{Anzahl der richtig erkannten Bits}}{\text{Anzahl der übertragenen Bits}}, \quad (44)$$

wenn die einzelnen Bits am Kanalausgang durch einen Beobachter ausgewertet werden sollen. Das Signal muß dann möglichst wenig Gesetzmäßigkeiten aufweisen, damit eine Verfälschung der Meßergebnisse vermieden wird. Gleichzeitig sollen aber die Nachrichten reproduzierbar sein, um Kontrollmessungen zu ermöglichen.

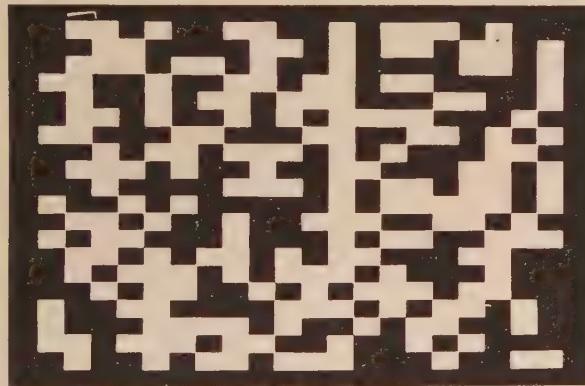


Bild 10. Optische Schwarzweißvorlage für die Fernsehkamera.



Bild 11. Oszillosgramm der Ausgangsspannung des Impulsformers. Viermalige Wiederholung der Nachricht (vier Zeilen des Fernsehbildes).

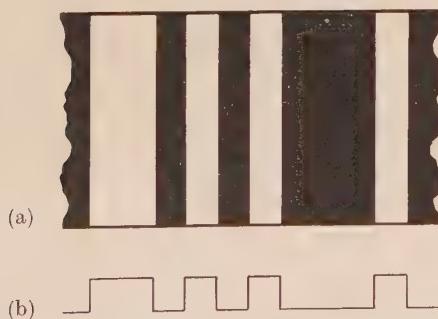


Bild 12. (a) Optische Vorlage für die Fernsehkamera.
(b) Spannungsverlauf während der Dauer einer Zeile am Ausgang des Signalformers.

Als Signalquelle wurde eine Fernsehanlage gewählt. Die Fernsehkamera tastete eine optische Schwarzweißvorlage nach Bild 10 ab.

Das zugehörige Videosignal wurde der Fernsehanlage entnommen und in einem Impulsformer aufgestellt und beschnitten. Bild 11 zeigt einen Ausschnitt aus dem Signal, während Bild 12 die Zuordnung von optischer Vorlage und elektrischem Signal verdeutlicht.

Die so gewonnenen statistischen Standardnachrichten wurden auf den Eingang des Nachrichten-

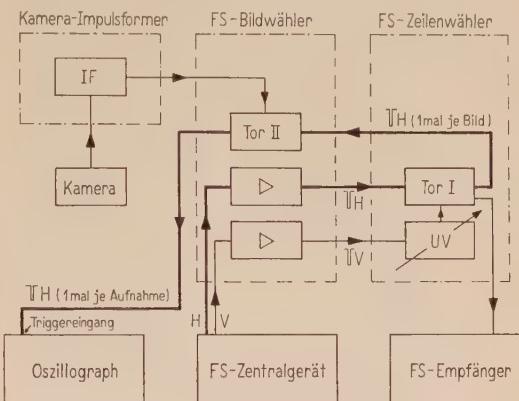


Bild 13. Blockschaltbild des Registriergerätes, bestehend aus Kamera-Impulsformer, Fernsehbildwähler und Fernsehzeilenvählern (H Zeilenwechselimpuls, V Bildwechselimpuls, IF Impulsformer, UV Univibrator).

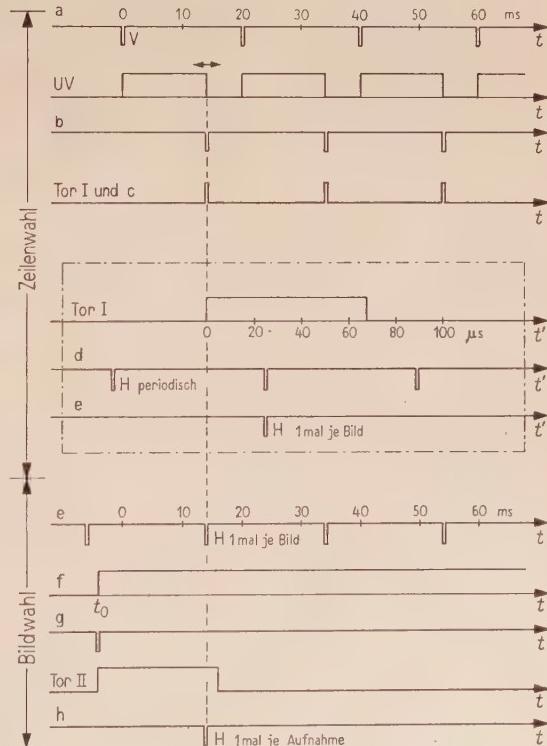


Bild 14. Zeitliche Auffeinanderfolge der Impulse im Registriergerät. In dem umrandeten Mittelteil ist die Zeitachse gespreizt, um die Funktionsweise von Tor I zu zeigen. Bezeichnungen vgl. Bild 13.

kanals als Originalnachricht gegeben. Die am Ausgang des Rechengerätes auftretende verschliffene und verrauschte Nachricht wurde zugleich mit der Originalnachricht auf einem Oszillographen mit Hilfe eines Registriergerätes als einmaliger Vorgang aufgezeichnet und photographiert. Die einmalige Aufzeichnung ist notwendig, damit nicht durch die Trägheit des Oszillographenschirmes eine Integration über das Rauschen erfolgt. Die Bilder 13 und 14 verdeutlichen die Funktionsweise des Registriergerätes.

Bild 15 zeigt als Blockschaltbild die Anordnung für die Sicherheitsbestimmung und entspricht Bild 9 für die Messung des Hilbertabstandes.

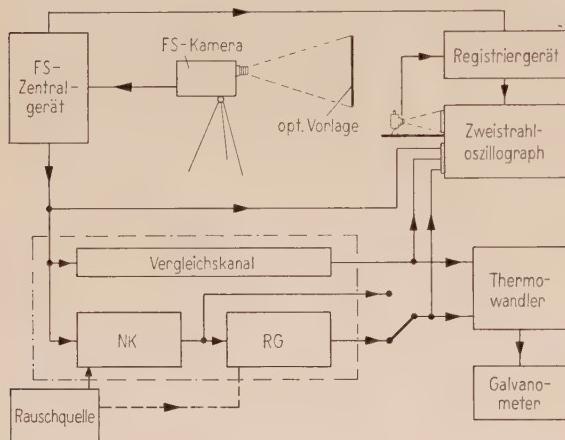


Bild 15. Blockschaltbild der Apparatur zur Bestimmung der Sicherheit bei Rückrechnung einer statistischen Nachricht hinter einem Nachrichtenkanal (NK Nachrichtenkanal, RG Rechengerät).

4. Sicherheit der Nachrichtenübertragung

4.1. Auswahl der Nachrichten für die Messung

Für die Auswahl der Nachrichten waren vor allem statistische Überlegungen und die Anpassung an die Gegebenheiten der Apparatur entscheidend. Es waren Bit-Gruppen bestimmter Länge auszuwählen, die möglichst gut eine unendlich lange Nachricht

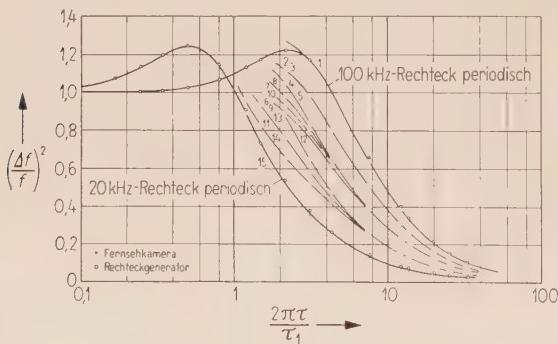


Bild 16. Abrundefehler von 15 statistischen Standardnachrichten nach Tabelle I. Für kleine Abrundefehler fallen die zu Nachrichten gleicher relativer Sprungstellenzahl $m:N$ gehörenden Kurven zusammen. Die Bezeichnung der Kurven entspricht der Nummerierung der Signale in Tabelle I.

hoher Entropie repräsentieren. Ferner sollten die Nachrichten am Ausgang des Rechengerätes alle den gleichen Abrundefehler aufweisen, um vermeidbare Streuungen der Meßergebnisse auszuschließen.

Zur weiteren Kennzeichnung der Nachrichten wurden zwei Verhältnisse herangezogen (vgl. Gl. (20)):

1. relative Anzahl der von Null verschiedenen Bits $n:N$,
2. relative Anzahl der Sprungstellen $m:N$.

Wie man zeigen kann [4], ist der Wert $n:N = 5,0$ durch Symmetrieeigenschaften und maximale Entropie ausgezeichnet. Zur Auswahl eines geeigneten Verhältnisses $m:N$ wurde der Hilbertabstand für

Tabelle I. Statistische Rechteckfolgen mit $n:N = 0,5$; $N = 10$.

Nr.	Nachricht	$m:N$
1	1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0	1,0
2	1 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0	0,8
3	1 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0	0,8
4	1 1 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0	0,6
5	1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0	0,6
6	1 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0	0,6
7	1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0	0,6
8	1 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0	0,6
9	1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0	0,6
10	1 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0	0,6
11	1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0	0,4
12	1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0	0,4
13	1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0	0,4
14	1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0	0,4
15	1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0	0,2

Tabelle II. Zusammenstellung der ausgewählten Nachrichten mit $n:N = 0,5$; $m:N = 0,6$; $N = 20$.

Nr.	Nachricht
1	0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0
2	0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1
3	0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1
4	1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1
5	0 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 1
6	0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0
7	1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1
8	0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0
9	0 1 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0 1
10	0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1
11	1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1
12	0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0
13	1 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1
14	0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0
15	0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0
16	0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0
17	1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0
18	1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0
19	1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0
20	0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 1

statistische Standardnachrichten nach Tabelle I bestimmt. Diese Messung ist in Bild 16 wiedergegeben und führte zur Auswahl des Wertes $m:N = 0,6$.

Tabelle II zeigt die für die Messung ausgewählten statistischen Standardnachrichten. Die Festlegung von $N = 20$ war durch die Bandbreite der Fernsehanlage bedingt. Die optische Vorlage zu Tabelle II zeigte bereits Bild 10.

4.2. Das Auswerteverfahren

Die auf photographischem Wege festgehaltenen Oszillogramme (vgl. Bild 17 bzw. Bild 19) wurden projiziert, wobei die Originalnachricht abgedeckt wurde. Die Auswerter mußten versuchen, aus der gestörten Nachricht am Ausgang des Rechengeräts die Originalnachricht zu ermitteln. Das Ergebnis wurde in Form einer Zahlenfolge, z. B.

1 0 0 0 1 1 0 0 1 ...

festgehalten und anschließend mit der bis dahin abgedeckten Originalnachricht verglichen.

Die gestörten Nachrichten haben gewisse systematische Eigenschaften, die zum Teil durch die Art ihrer Erzeugung oder durch den Übertragungsweg bedingt sind. Zum Beispiel bestehen alle Nachrichten aus 20 Bits. Ferner bleibt bei der ganzen Auswertung die Verschleifung der Rechteckimpulse gleichartig. Es wurde daher eine Reihe von apriori-Informationen vorgegeben:

1. die Höhe der Rechteckimpulse,
2. die Länge τ eines Einzelbits,
3. die Phasenlage der Bits,
4. die Verschleifung der Rechteckimpulse.

Die Kenntnis der Verhältnisse $n:N$ und $m:N$ der Nachrichten wurde bei der Auswertung nicht benutzt.

Diese apriori-Informationen stellen eine nicht unerhebliche Erhöhung der Sicherheit dar. Man könnte aber auf sie nur verzichten, wenn man einen vollkommen objektiven Auswerter zur Verfügung hätte, was nur eine Auswertemaschine erfüllen könnte. Andererseits sind die hier ausgenutzten apriori-Informationen bei der Nachrichtenübermittlung in der Praxis realisierbar.

Mit diesen Vorkenntnissen wurden die gestörten Nachrichten von mehreren Personen ausgewertet. Durch Vorversuche wurde zunächst das Auswerteverfahren überprüft. Dabei ergab sich, daß die Streuung der Ergebnisse verschiedener Auswerter innerhalb der Meßgenauigkeit liegt. Die Anzahl der Auswerter wurde deshalb auf zwei beschränkt.

4.3. Bestimmung der Sicherheit S

Als erstes wurde die Sicherheit S_1 der Nachrichtenübermittlung bestimmt, wenn die Störung (weißes Rauschen) gleichberechtigt mit dem Signal am Eingang des Nachrichtenkanals eingespeist wird. Die hohen Frequenzkomponenten werden von dem Übertragungsweg stark gedämpft (Tiefpaß),

so daß das Rauschspektrum im wesentlichen nur Komponenten unter der Grenzfrequenz $\nu_{gr} = 1/\tau_2$ der Hintereinanderschaltung von Nachrichtenkanal und Rechengerät hat. Die Übertragungsfunktion ist für $\tau_2 = \tau_3$ (vgl. Formel (39))

$$G(\nu) = \left(\frac{1}{1 + i\nu\tau_2} \right)^4, \quad (45)$$

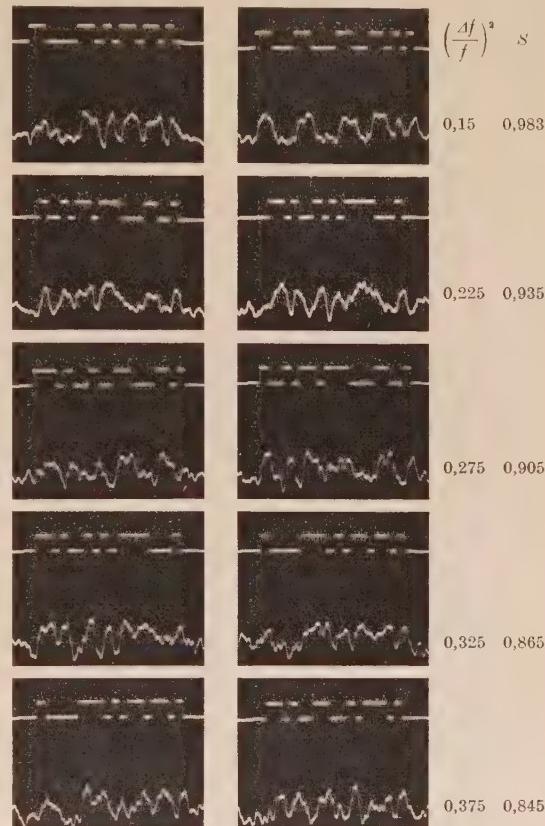


Bild 17. Beispiele für Standardnachrichten aus 20 Bits am Ausgang des Rechengerätes bei Einspeisung von weißem Rauschen am Eingang des Nachrichtenkanals (untere Zeile). Die obere Zeile gibt jeweils die zugehörige Originalnachricht am Eingang des Nachrichtenkanals wieder. Am rechten Rand der Übersichtstafel ist der relative Rauschfehler und die ermittelte Sicherheit S angegeben.

also der Frequenzgang eines vierstufigen Verstärkers. Bei der vorliegenden Messung betrug

die Bit-Länge $\tau = 2,5 \mu s$,
die Kanalzeitkonstante $\tau_1 = 2\pi \cdot 3,28 \mu s$,
die Rückrechenzeitkonstante $\tau_2 = 2\pi \cdot 0,328 \mu s$,
d. h. der Rückrechenfaktor $g = 10$.

Es wurden verschiedene Störfehler durch Verändern der Ausgangsamplitude des Rauschgenerators erzeugt und jeweils die Sicherheit S bestimmt. Bild 17 zeigt Beispiele für verschiedene Störfehler. Der Störfehler und die nach dem beschriebenen Auswerteverfahren bestimmte Sicherheit S sind angegeben. Für jeden Störfehler wurden nach dem oben beschriebenen Verfahren 400 Bits ausgewertet. Das Ergebnis zeigt Bild 18. Die Gerade a geht nicht

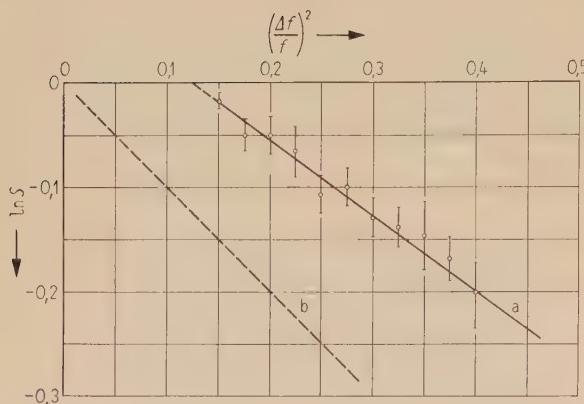


Bild 18. Abhängigkeit der Sicherheit S vom relativen Rauschfehler in logarithmischer Darstellung (Kurve a) bei Einspeisung von weißem Rauschen am Eingang des Nachrichtenkanals (zu Kurve b vgl. die Diskussion der Meßergebnisse).

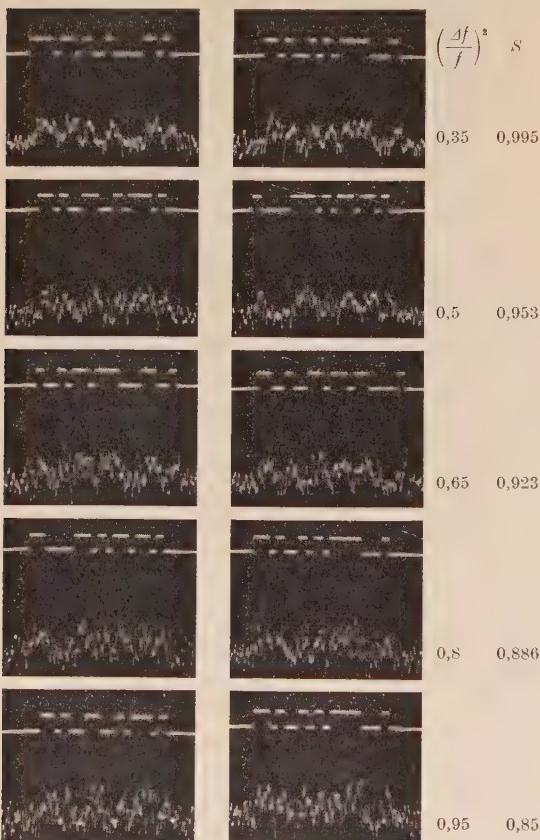


Bild 19. Beispiele für Standardnachrichten aus 20 Bits am Ausgang des Rechengerätes bei Einspeisung von weißem Rauschen am Ausgang des Nachrichtenkanals (untere Zeile). Die obere Zeile gibt jeweils die zugehörige Originalnachricht am Eingang des Nachrichtenkanals wieder. Am rechten Rand der Übersichtstafel ist der relative Rauschfehler und die ermittelte Sicherheit S angegeben.

durch den Nullpunkt, sondern schneidet die Abszisse bei dem Wert 0,125. Es war zu erwarten, daß die Sicherheit eins bereits bei endlichen Störfehlern erreicht wird, da die angegebenen apriori-Informa-

tionen die Auswirkungen der Störungen vermindern. Die Steigung der Geraden hat den Wert $\kappa_1 = 0,75$.

Analog zum Abschnitt 4.2 wurde die Sicherheit S_2 der Nachrichtenübermittlung auch für den Fall gemessen, daß die Störung am Ausgang des Nachrichtenkanals bzw. am Eingang des Rechengeräts auftritt. Signal und Störung durchlaufen jetzt Übertragungswege mit verschiedenen Frequenzgängen: Das Spektrum der Nachricht ist mit der Übertragungsfunktion $G(\nu)$ zu multiplizieren, während bei der Störung $\sigma(\nu)$ als Faktor auftritt. Die Gestalt der Rechengerätübertragungsfunktion bestimmt, daß niederfrequente Störkomponenten am Ausgang des Rechengeräts fast ganz fehlen. Stattdessen treten hochfrequente „Rauschspitzen“ auf, wie die Oszillogramme des Bildes 19 deutlich zeigen.

Der erste Eindruck, daß sich die Oszillogramme nach Bild 19 schwieriger auswerten lassen als entsprechende nach Bild 17, wenn man den relativen Störfehler als Bezugsgröße wählt, läßt sich nicht bestätigen. Vielmehr zeigt sich, daß nach einiger Übung relativ hohe Sicherheiten erzielt werden.

Entsprechend Bild 18 erhält man für die Sicherheit S_2 bei Rauschen am Eingang des Rechengerätes das Diagramm des Bildes 20. Die Steigung der Geraden a beträgt in diesem Fall $\kappa_2 = 0,25$, der Schnittpunkt mit der Abszisse liegt bei 0,34.

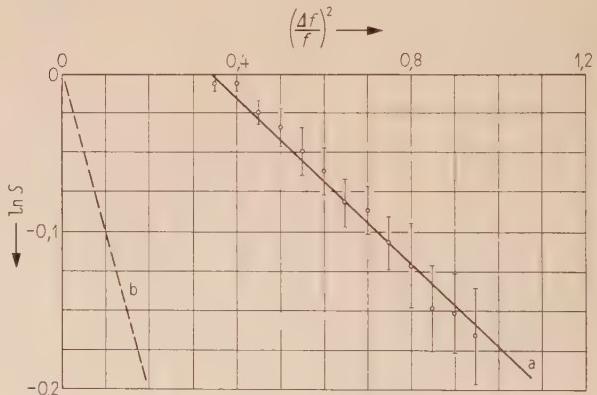


Bild 20. Abhängigkeit der Sicherheit S vom relativen Rauschfehler in logarithmischer Darstellung (Kurve a) bei Einspeisung von weißem Rauschen am Eingang des Rechengerätes (zu Kurve b vgl. die Diskussion der Meßergebnisse).

4.4. Diskussion der Meßergebnisse

Verlängert man die Geraden a in den Bildern 18 und 20 bis zur Ordinatenachse, so schneiden beide bei dem Wert $\ln S_0 = 0,9$. Es liegt nahe, in dieser gemeinsamen Größe eine Auswirkung der apriori-Information zu sehen. Eine solche apriori-Information ist in der von WOLTER [1] für die Sicherheit angegebenen Formel

$$S = \exp \left(-\kappa \frac{N_R}{N_S} \right) \quad (46)$$

nicht vorgesehen. Setzen wir

$$\begin{aligned} \ln S_A &= \ln S_1 - \ln S_0, \\ \ln S_E &= \ln S_2 - \ln S_0, \end{aligned} \quad (47)$$

so ist damit in den Meßkurven der Einfluß der a priori-Information eliminiert. Nach WOLTER ist in Gl. (46) die Größe κ eine bei optimaler Bemessung des Rechengerätes universale Konstante, d. h. es müßte sich

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa \quad (48)$$

ergeben. Die Aufspaltung der Konstante in zwei verschiedene Werte zeigt, daß bei der Wahl des Verhältnisses

$$\beta = \tau_2/\tau = 0,8 \quad (49)$$

der optimale Fall nicht erreicht wurde. Im Abschnitt 4.5 soll deshalb gezeigt werden, wie es möglich ist, sich auf den Fall der optimalen Bemessung des Rechengerätes zu beziehen.

4.5. Die Bewertungsfunktion

Bei der Auswertung der gestörten Standardnachrichten fällt auf, daß der Auswerter von Störungen, deren Anstiegszeiten sehr verschieden sind von der Anstiegszeit des Signals am Ausgang, abstrahiert. Es zeigt sich, daß diejenigen spektralen Komponenten der Störung, die in der Umgebung der mittleren Grundfrequenz $\bar{\nu} = \frac{m}{N} \frac{1}{\tau}$ der Rechteckfolge liegen, die Erkennbarkeit des Signals besonders stark beeinträchtigen.

Diese Beobachtung legt es nahe, die Spektralkomponenten der Störung mit einem Gewicht zu versehen. Diese Gewichtsfunktion — im weiteren Bewertungsfunktion genannt — ist von der auswerten Person abhängig, die Streuung bei verschiedenen Auswertern ist aber nicht sehr stark. Die Bewertungsfunktion muß für sehr kleine und sehr große Frequenzen gegen den Wert Null gehen. Im Grenzfall sehr kleiner Frequenzen wirkt sich die Störung nur als eine Verschiebung des Nullniveaus aus, während andererseits über sehr hochfrequente Störungen das Auge mühselos integriert (vgl. Bild 17 und Bild 19). Ihr Maximum hat die Bewertungsfunktion dort, wo die Störung ein Bit vortäuscht oder ein vorhandenes ausgelöscht wird, d. h. etwa in dem Frequenzgebiet

$$\nu_b = \frac{1}{2\tau} \quad \text{bis} \quad \nu_b = \frac{2}{\tau}.$$

Infolge der unterschiedlichen Bewertung des Rauschens wird die Sicherheit durch eine Variation der oberen Zeitkonstante nur wenig beeinflußt. Bild 21 zeigt eine mögliche Form der Bewertungsfunktion. Die Funktion $b(\nu)$ ist so gewählt, daß ihr Maximum den Funktionswert eins besitzt.

Unter Zugrundelegung der Bewertungsfunktion muß man in Formel (46) statt der Rauschleistung

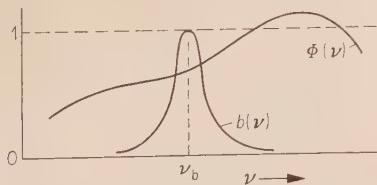


Bild 21. Bewertungsfunktion $b(\nu)$ und spektrale Verteilung der Störung $\Phi(\nu)$. ν_b kennzeichnet die Lage des Maximums der Bewertungsfunktion (ν -Achse logarithmisch geteilt).

nach Formel (26),

$$N_R = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\nu)|^2 |G(\nu)|^2 d\nu \quad (26)$$

die wirksame Störleistung

$$\tilde{N}_R = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\nu)|^2 |b(\nu)|^2 |G(\nu)|^2 d\nu \quad (50)$$

einsetzen, die gleiche Überlegung gilt für $\sigma(\nu)$. Bei Annahme von weißem Rauschen erhält man dann

$$S_E = \exp \left(-\kappa \frac{n_{RE}}{N_{SE}} \int_{-\infty}^{\infty} |b(\nu)|^2 |G(\nu)|^2 d\nu \right), \quad (51a)$$

$$S_A = \exp \left(-\kappa \frac{n_{RA}}{N_{SA}} \int_{-\infty}^{\infty} |b(\nu)|^2 |\sigma(\nu)|^2 d\nu \right). \quad (51b)$$

Ist die Bewertungsfunktion schmal gegenüber den Übertragungsfunktionen $G(\nu)$ bzw. $\sigma(\nu)$, so vereinfachen sich die Formeln (51) zu

$$\ln S_E = -\kappa \frac{n_{RE}}{N_{SE}} a_1 A, \quad (52a)$$

$$\ln S_A = -\kappa \frac{n_{RA}}{N_{SA}} a_2 A \quad (52b)$$

mit

$$a_1 = |G(\nu_b)|^2, \quad a_2 = |\sigma(\nu_b)|^2$$

und

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} |b(\nu)|^2 d\nu.$$

Die Normierung von A läßt sich ohne genaue Kenntnis von $b(\nu)$ nicht ermitteln, A geht aber in das Endergebnis auch nicht ein. Die Formeln (52) sind mit den aus Gl. (46), (47) mit Gl. (29), (37) und (38) gewonnenen Formeln für $s = 2$ und $\tau_2 = \tau_3$,

$$\ln S_E = -\kappa_1 \left(\frac{\Delta f}{f} \right)^2 = -\kappa_1 \frac{n_{RE}}{N_{SE}} \frac{1}{\tau_2} \frac{5\pi}{16}, \quad (53a)$$

$$\ln S_A = -\kappa_2 \left(\frac{\Delta f}{f} \right)^2 = -\kappa_2 \frac{n_{RA}}{N_{SA}} \frac{1}{\tau_2} \frac{\pi}{16} g^4 \quad (53b)$$

zu vergleichen. κ_1 und κ_2 waren durch die Messung ermittelt worden. Durch Gleichsetzen von Gl. (52) und (53) erhält man das Verhältnis

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \frac{5}{g^4} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{|G(\nu_b)|^2}{|\sigma(\nu_b)|^2} = 1,5 \cdot 10^{-3}. \quad (54)$$

Aus Gl. (54) läßt sich das zum gemessenen κ -Verhältnis gehörige ν_b ermitteln, und man erhält — wiederum für $s = 2$ und $\tau_2 = \tau_3$ — den Wert [4]

$$\nu_b \approx \frac{1}{2\tau_2} = \frac{1}{1,6\tau} \quad (55)$$

als Lage des Maximums der Bewertungsfunktion im Fall der vorliegenden Messungen.

Variiert man bei festem Nachrichtenkanal g bzw. τ_2 , um zur optimalen Anpassung des Rechengerätes zu gelangen, so bleibt dabei das Verhältnis a_1/a_2 konstant, solange $1/\tau_2 \geqq \nu_b$ ist. Für diesen Fall bleibt in Gl. (54) die rechte Seite invariant und es gehört zu der Forderung $\kappa_1 = \kappa_2$ ein

$$g/g_{opt} \approx 1,3. \quad (56)$$

Rechnet man auf das bereits in Gl. (49) eingeführte Verhältnis β um, so erhält man

$$\beta_{\text{opt}} = \tau_2 \text{opt} / \tau \approx 1,0. \quad (57)$$

Mit Gl. (56) ist es weiterhin möglich, aus Gl. (53) durch Vergleich des optimalen Falles mit dem gemessenen den Wert von α_{opt} zu bestimmen:

$$\alpha_{\text{opt}} = \alpha_1 \frac{\tau_2 \text{opt}}{\tau_2} \approx 1,0. \quad (58)$$

Die auf Grund der obigen Überlegungen zur Optimalbemessung des Rechengerätes aus den gemessenen Kurven gewonnenen Größen β_{opt} und α_{opt} bestätigen die von WOLTER in [1] mit Hilfe rein statistischer Forderungen gefundenen Werte im Rahmen der Meßgenauigkeit.

Zusammenfassung

Die Untersuchungen geben die experimentelle Bestätigung für das gegenläufige Verhalten der statistischen Fehler gegenüber dem Verschleifungsfehler bei Rückrechnung zum Zwecke der Band-

breitenvergrößerung. Dabei konnte nachgewiesen werden, daß sich am Eingang des Rechengeräts auftretende Störungen wesentlich stärker fortpflanzen als die am Eingang des Nachrichtenkanals vorhandenen, daß aber trotzdem eine sehr weitgehende Rückrechnung möglich ist. Das Verhalten der Sicherheit bei Variation der Rauschleistungsdichte wurde untersucht und eine Umrechnung auf den Fall optimaler Bemessung des Rechengeräts angegeben.

Schrifttum

- [1] WOLTER, H., Die Grundtheoreme der Informationstheorie als Folge der Fehlerfortpflanzungsgesetze bei der Auflösung von Faltungsintegralgleichungen. A. E. U. **13** [1959], 101–113.
- [2] WOLTER, H., Zu den Grundtheoremen der Informationstheorie, insbesondere in der Nachrichtentechnik. A. E. U. **12** [1958], 335–345.
- [3] LÖHN, K., Fehlerfortpflanzung bei der Rückrechnung von Informationen hinter realen Nachrichtenkanälen. Staatssexamensarbeit Universität Marburg.
- [4] WEINERTH, H., Die Sicherheit der Übermittlung von Informationen durch reale Nachrichtenkanäle nach Rückrechnung mit einem elektronischen Analogrechner. Diplomarbeit Universität Marburg.

BUCHBESPRECHUNG

R. E. Collin, *Field theory of guided waves*. McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto-London 1960, XIII, 606 Seiten, zahlr. Bilder, 15,5 cm × 23,5 cm, Ganzleinen £ 6-8-0.

Dieses Werk behandelt in lehrbuchartiger Form auf fortgeschrittener Basis die Theorie des von Wellenleitern geführten elektromagnetischen Feldes und die zu ihrer Durchführung entwickelten modernen Methoden in weitem Umfang. Es bezweckt, den Anschluß zwischen der klassischen Feld- und Hohlleitertheorie und der derzeitigen Zeitschriftenliteratur herzustellen sowie dem einzelnen Gebieten fernerstehenden Ingenieur als Nachschlagewerk zu dienen.

In einem den Grundlagen gewidmeten Kapitel findet sich neben den klassischen Beziehungen der Maxwellschen Theorie manches, was sonst oft zu kurz kommt, wie die Verhältnisse an scharfen Kanten, das Babinettsche Prinzip und das wichtige Lorentzsche Reziprozitätstheorem.

Das zweite Kapitel illustriert den Gebrauch der Greenschen Funktion und ihre verschiedenen Darstellungen an Beispielen sowohl für skalare wie vektorielle Probleme. Es folgt die Betrachtung ebener Transversalwellen und ihres Durchgangs durch geschichtete Medien, wobei sich Gelegenheit zur Einführung der Wellenparameter bietet. Auch auf anisotrope und nichtreziproke Medien wird kurz eingegangen. Der folgende Abschnitt über Zwei-Leiterysteme ist besonders wegen der Berechnung des Wellenwiderstandes von Streifenleitungen mittels konformer Abbildung und Variationsmethoden interessant. Das 5. Kapitel bringt die klassische Hohlleitertheorie. Im Anschluß daran wird der Zusammenhang mit der Theorie der Mehrleiterysteme und die Verbindung zwischen Feldgrößen und Schaltelementen bei Vierpolen dargelegt. Kapitel 6 befaßt sich mit den sonst selten behandelten Hohlleitern, die teilweise mit einem Dielektrikum erfüllt sind, wobei die Rayleigh-Ritzsche Methode zur Bestimmung der Fortpflanzungskonstanten eingeführt wird.

Den schwierigen Fragen der Anregung von Hohlleitern ist das nächste Kapitel gewidmet. Die Methode der Greenschen Funktion findet Anwendung bei Sonden und Schleifen, während die Kopplung durch Löcher mittels des Lorentzschen Reziprozitätstheorems berechnet wird. Ein kurzer Abschnitt betrifft Einschaltvorgänge. Kapitel 8 behandelt die Variationsmethoden zur Bestimmung der Parameter von Unstetigkeiten

in Hohlleitern im Anschluß an Schwinger, wobei besonderer Wert darauf gelegt wird, sowohl obere wie untere Grenzen zu erhalten. Das nächste Kapitel betrifft periodische Strukturen, die mittels Vierpolketten behandelt werden. Das Floquetsche Theorem wird aber auch abgeleitet. Ein mathematisch anspruchsvolles Kapitel befaßt sich mit Problemen, die sich durch Integraltransformationen lösen lassen, wie die Wiener-Hopfsche Integralgleichung. Einige Vorkenntnisse über die Laplace-Transformation und Integration im Komplexen sind hier unerlässlich. Dies gilt auch für einen Teil des nächsten Kapitels über Oberflächenwellen (Gouba-Leiter, dielektrischer Stielstrahler usw.). Insbesondere bei der Bestimmung der Anregung solcher Wellen, wobei ein Linienspektrum und ein kontinuierliches Spektrum gleichzeitig entstehen, werden funktionentheoretische Hilfsmittel, wie die Sattelpunktmethode, herangezogen. Das Buch schließt mit einem Kapitel über künstliche Dielektrika.

In einem Anhang sind die hauptsächlich benutzten mathematischen Hilfsmittel zusammengestellt. Er enthält einen sehr nützlichen Abschnitt über Methoden zur Summation Fourierscher Reihen nebst einer Tabelle solcher Summen.

An Vorkenntnissen werden eine gewisse Vertrautheit mit der Hohlleitertheorie sowie mit verschiedenen mathematischen Disziplinen (Vektoren, Dyaden, komplexe Integration, Laplacesche Transformation u. a.) vorausgesetzt. Die Darstellung ist dem fortgeschrittenen Charakter und gedrängten Inhalt des Buches entsprechend knapp, aber im allgemeinen gut verständlich, nur ganz gelegentlich bleiben Unklarheiten bestehen. Eine größere Zahl von Rückverweisungen würde die Lektüre noch erleichtern. Von Ungenauigkeiten und Versehen ist das Buch zwar nicht ganz frei, sie beeinträchtigen aber seinen Wert kaum. Vor allem zur Einarbeitung dürfte es sehr brauchbar sein. Die verwendeten Methoden werden meist direkt an Beispielen eingeführt. Allgemeine Regeln und eine das Wesentliche hervorhebende Übersicht oder kritische Würdigung werden selten gebracht. Dies bedeutet eine gewisse Erschwerung bei der Verwendung als Nachschlagewerk.

Das Buch stellt zweifellos eine willkommene und wertvolle Erweiterung der Lehrbuchliteratur dar. Die Durcharbeitung im ganzen oder einzelner Kapitel dürfte den Leser ohne weiteres in den Stand setzen, sich der Zeitschriftenliteratur auf diesem Gebiet zuzuwenden.

K. SCHNETZLER

Permanentmagnetische Fokussierungsanordnungen für Höchstfrequenzröhren

von PAUL MEYERER

Mitteilung aus dem Wernerwerk für Bauelemente der Siemens & Halske AG, München

(A. E. U. 15 [1961], 467–474; eingegangen am 9. Mai 1961)

DK 621.318.23:621.385.63

Die wichtigsten Probleme, die bei der Erzeugung von longitudinalen magnetischen Feldern für Laufzeitröhren gelöst werden müssen, sind die Herstellung eines geeigneten axialen Feldverlaufs, Freiheit von transversalen Störfeldern, vernünftiger Raumbedarf und Abschirmungsfragen. Zur praktischen Dimensionierung von magnetischen Kreisen erweist sich eine Analogiebetrachtung als nützlich, bei der das magnetische Feld durch ein Strömungsfeld im elektrolytischen Trog nachgebildet wird. Damit ergeben sich ganz bestimmte Anordnungen für eine 4-GHz-Wanderfeldröhre und für eine mm-Rückwärtswellenröhre. Die Überlegungen führen weiter auf ein neuartiges, räumlich periodisches Fokussierungssystem unter Verwendung von Alnico V-Material.

The principal problems to be solved for the application of longitudinal magnetic fields with transit-time tubes are the knowledge of an exactly determined field distribution along the axis, freedom of perturbing transversal fields, reasonable space requirements, and the question of shielding. For the determination of the practical dimensions of the magnetic circuits an analog method turns out to be very useful where the magnetic field is simulated by the flow pattern in an electrolytic tank. The resulting magnetic mounts for a 4-Gc/s traveling-wave tube and a backward-wave tube for millimeter waves are described in detail. The considerations lead further to a novel focusing system with space periodicity and use of Alnico V material.

1. Ein Vergleich zwischen den verschiedenen Magnetmaterialien und Hinweise auf ihre grundsätzliche Verwendbarkeit

Bei einem Permanentmagneten ist die Abhängigkeit der magnetischen Spannung pro Längeneinheit, der Feldstärke H , von dem magnetischen Fluß pro Flächeneinheit, der Induktion B , eine Materialeigenschaft und wird durch die Hysteresiskurve (Bild 1)

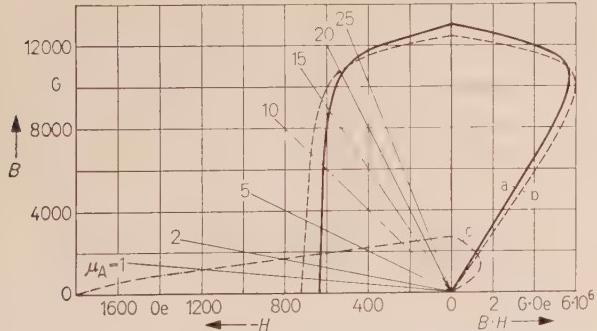


Bild 1. Hysteresiskurve verschiedener Magnetmaterialien;
Kurve a: Alnico V,
Kurve b: Alnico VI,
Kurve c: Siferrit DE.

dargestellt. Aus ihr können die Koerzitivkraft H_c , die Remanenz B_r und das maximale Energieprodukt $(BH)_{\max}$ abgelesen werden. Die Magnetmaterialien auf der Basis Aluminium-Nickel-Kobalt haben ein H_c bis 800 Oersted, ein B_r bis 14000 Gauß und einen Energieinhalt zwischen 5 und $8 \cdot 10^6$ Gauß × Oersted. Dagegen besitzen die hartmagnetischen Ferrite ein H_c bis 2500 Oersted, ein B_r bis 3500 Gauß und einen Energieinhalt bis zu $3,5 \cdot 10^6$ Gauß × Oersted.

Man ist bestrebt, den Magneten im Punkt maximaler Energie zu betreiben. Die Permeabilität in diesem Punkt,

$$\mu_A = B_A / H_A, \quad (1a)$$

ist für Alnico V $\mu_A = 20$, während für Siferrit DE $\mu_A \approx 1$ ist. Die Verschiedenheit der Werte hat, wie wir gleich sehen werden, einen grundsätzlichen Einfluß auf die Abmessungen des Magnets.

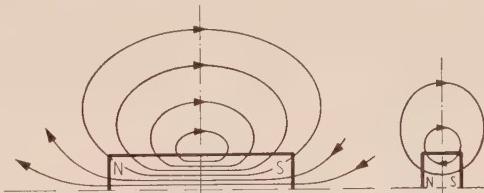


Bild 2. Feldlinienbild eines langen und eines kurzen Stabmagneten.

Vergleicht man einen langen und einen kurzen Stabmagneten, in denen dieselbe Feldstärke H_A herrschen soll (Bild 2), dann sind im Außenraum des langen Magneten mehr Kraftlinien vorhanden als beim kurzen. Dieses Verhalten ist analog dem eines elektrostatischen Dipolfeldes; auch dort hat der lange Dipol eine größere Streuung als der kurze. Die Permeabilität μ_A kann auch aus dem Streufluß berechnet werden. Sie ist

$$\mu_A = \frac{\Phi}{H_A F_M}, \quad (1b)$$

wobei F_M den Magnetquerschnitt bedeutet. Bei konstanter Feldstärke H_A wird also μ_A mit abnehmendem Streufluß kleiner. Daraus läßt sich die bekannte Dimensionierungsregel ableiten, daß ein

großer μ_A -Wert (z. B. 20) einen schlanken Magneten und ein kleiner μ_A -Wert (z. B. 1) einen gedrungenen Magneten ergibt.

Für ein Ellipsoid ist μ_A aus den geometrischen Abmessungen exakt berechenbar [1]. Für alle anderen Magnetformen ist man auf Näherungsverfahren angewiesen. Für Rohrmagnete hat BENNETOT [2] ein rechnerisches Näherungsverfahren angegeben. Er führt fiktive magnetische Mengen ein, die nicht nur an den Polen, sondern auch im Volumen des Magnets verteilt sind. Mit dieser Annahme erhält er eine befriedigende Übereinstimmung zwischen gemessenen und theoretischem Feldverlauf. Wir fanden empirisch, daß für Stabmagnete die Gleichung

$$\mu_A \approx \mu_0 \left(2 + \frac{l_M}{d} \right) \frac{l_M}{d} \quad (2)$$

eine brauchbare Näherung darstellt. l_M ist die Länge und d der Außendurchmesser des Magnets. Für $l_M > d$ ist Gl. (2) auch bei quadratischem und rechteckigem Querschnitt (Seitenverhältnis < 2) anwendbar, wenn d aus der Fläche der Magnete berechnet wird.

Für komplizierte magnetische Kreise sind alle bisher bekannten Näherungsverfahren zu ungenau. Wir entwickelten daher aus einer Analogiebetrachtung zwischen dem elektrischen Strömungsfeld und dem magnetischen Feld eine Methode, um die Eigenschaften magnetischer Kreise empirisch zu bestimmen.

2. Ein Näherungsverfahren zur Dimensionierung magnetischer Kreise mit Hilfe des elektrolytischen Tropes

Damit der Arbeitspunkt eines Magnets bestimmt werden kann, muß immer für die am magnetischen Kreis liegende magnetische Spannung der erforderliche Flußbedarf bekannt sein. Dabei ist es nicht notwendig, den Fluß und die Spannung explizit zu kennen, es genügt die Kenntnis des magnetischen Leitwertes

$$\frac{1}{R_\mu} = \frac{\Phi}{V}, \quad (3a)$$

was die Dimensionierung mittels einer Analogiebetrachtung, wie wir später sehen werden, wesentlich vereinfacht. Bildet man das Feldbild eines Magnets im elektrolytischen Trop nach, so genügt auch hier zur Charakterisierung des Kraftlinienfeldes der Strömungsleitwert, welcher jetzt durch eine Strom- und Spannungsmessung ermittelt werden kann.

Zunächst wollen wir nun diese Methode an einem einfachen Beispiel, der Dimensionierung eines Scheibenmagnets, näher erläutern. Das Feldbild dieses Magnets (Bild 3a) kann im elektrolytischen Trop durch zwei an Spannung liegende Metallplatten nachgebildet werden (Bild 3b), wobei aber nur der Kraftlinienverlauf außerhalb der Platten identisch mit dem des Magnets ist. Der gesuchte Außenleitwert $1/R$ ergibt sich nach dem Ersatzschaltbild 3c zu

$$\frac{1}{R} = \frac{I_m}{U} - \frac{1}{R_p}, \quad (4)$$

wobei $1/R_p$ der Leitwert zwischen den Platten ist und sich aus der Leitfähigkeit des Elektrolyts σ für kleinen Plattenabstand errechnen läßt:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{l}{\sigma F} \quad (5)$$

(F Plattenquerschnitt).

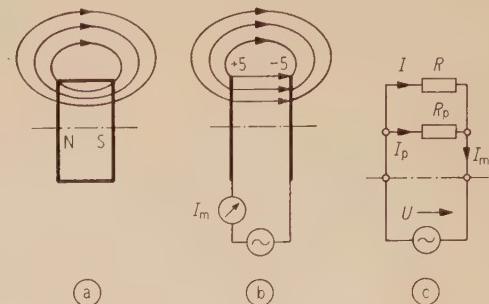


Bild 3. Scheibenmagnet mit Nachbildung im elektrolytischen Trop.

Der magnetische Leitwert $1/R_\mu$ ist durch eine Umrechnung aus dem Strömungsleitwert $1/R$ zu gewinnen:

$$\frac{1}{R_\mu} = \mu_0 \frac{\mu}{\sigma} \frac{1}{R}. \quad (3b)$$

(Bei unseren folgenden Überlegungen ist $\mu = 1$, weil wir nur Felder in Luft betrachten werden.)

Der Arbeitspunkt des Magnets, also auch die Permeabilität μ_A , ergibt sich dann in bekannter Weise zu

$$\mu_A = \frac{1}{R_\mu} \frac{l_M}{F_M}, \quad (6)$$

wobei l_M die Länge und F_M den Querschnitt des Magnets darstellt.

Bei größeren Magnetlängen genügt es nicht, den Magneten durch zwei Platten nachzubilden. Der Potentialabfall würde vorwiegend an den Platten konzentriert werden, während man in den meisten praktischen Fällen einen linearen Potentialanstieg anstrebt, also eine konstante Feldstärke H in der Magnetisierungsrichtung. Der Magnet wird deshalb im Modell durch eine Anzahl von Platten nachgebildet, die über einen niederohmigen Spannungssteiler angeschlossen werden. Bei der Dimensionierung des Magnets geht man nun so vor, daß für den gewünschten μ_A -Verlauf über die Länge des Magneten aus der Magnetisierungskennlinie des Magnetmaterials die Feldstärke H und damit der Potentialverlauf bestimmt wird, der an den Platten einzuspeisen ist. Es wird dann iterativ der Magnetquerschnitt gesucht, bei dem $\mu_A = f(l)$ den vorgegebenen Wert erreicht. Unsere Erfahrung hat gezeigt, daß nur ein bis zwei Iterationsschritte notwendig sind, um auch bei komplizierten Magnetenordnungen die gesuchte Lösung zu finden.

Es ist noch zu erwähnen, daß als Tropmodell bei rotationssymmetrischen Magnetenordnungen ein Kreissegment genügt und bei symmetrischen Modellen eine Halbierung in der Symmetrieebene möglich ist, wobei z. B. in letzterem Fall der gemessene

Leitwert verdoppelt werden muß. Außerdem erlaubt es die Modellmessung, den zu untersuchenden Magneten verkleinert oder vergrößert nachzubilden. Die Leitwerte bleiben unverändert, wenn alle Abmessungen linear geändert werden.

3. Uniforme Magnetfelder

Zur Fokussierung der Elektronenstrahlen von Laufzeitröhren werden magnetische Induktionen zwischen 500 und 4000 Gauß über eine Länge bis zu 20 cm benötigt. Die Herstellung dieser Felder erforderte die Lösung neuer magnetischer Probleme, wie z. B. die Freiheit von magnetischen Transversalfeldern oder besonders streuungsarme Magnetanordnungen.

Eine erste Ausführungsform eines Permanentmagneten war der Rohrmagnet [2], ein in Längsrichtung magnetisiertes Rohr aus Magnetwerkstoff. Es ist interessant, daß zwischen dem axialen Feldverlauf dieses Magnets und dem einer Zylinderspule ein grundsätzlicher Unterschied besteht. Beim Rohr-

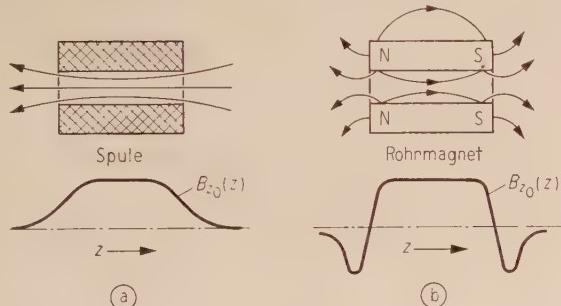


Bild 4. Axialer Verlauf der Induktion von Spule und Rohrmagnet.

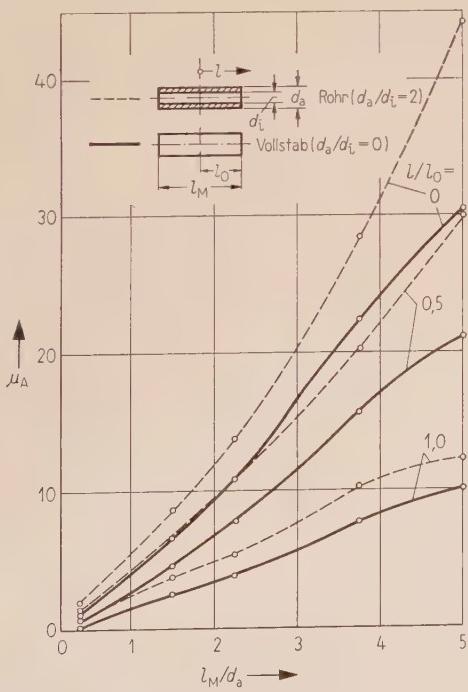


Bild 5. μ_A -Verlauf beim Rohr- und Stabmagneten.

magnet ändert die axiale Induktion B_{z_0} im Gegensatz zur Spule ihre Richtung (Bild 4a und 4b), was aus dem eingezeichneten Verlauf der Kraftlinien verständlich wird. Um die Dimensionierung eines Rohrmagnets zu erleichtern, haben wir mit der beschriebenen Analogon-Methode den μ_A -Verlauf für Rohr- und Stabmagnete in Abhängigkeit von der Länge und dem Durchmesser des Magnets bestimmt (Bild 5).

Nachteilig ist beim Rohrmagneten, daß außer dem Nutzfluß noch ein merklicher Streufluß vorhanden ist, der z. B. fremde Bauelemente stören beeinflussen könnte, bzw. daß über den Streufluß durch äußere Eisenteile die Feldsymmetrie des Magnets selbst gestört wird. Dieser große Streufluß ist bei einem langen uniformen Feld grundsätzlich nicht zu vermeiden, weil bei einem langen Dipol die Kraftlinien entsprechend weit in den Raum streuen. Durch eine Hülle aus Weicheisenblech um den Rohrmagneten kann zwar der Streufluß außerhalb dieser zu Null gemacht werden, aber zwischen Rohrmagneten und Abschirmung entsteht gegenüber dem „Nur-Rohrmagnet“ ein verstärkter Streufluß, was sich in einem größeren μ_A -Wert ausdrückt.

Durch eine grundsätzlich andere Magnetform ist es zwar möglich, den außerhalb der Magnetenordnung fließenden Streufluß zu vermeiden, aber nicht, wie wir später sehen werden, eine insgesamt kleinere Streuung zu erreichen, die sich in einem kleineren μ_A -Wert ausdrücken würde. Bei dieser Anordnung — wir nennen sie 4π -Magnet — stehen die Magnete senkrecht zur Achse (Bild 6) und sind außen durch

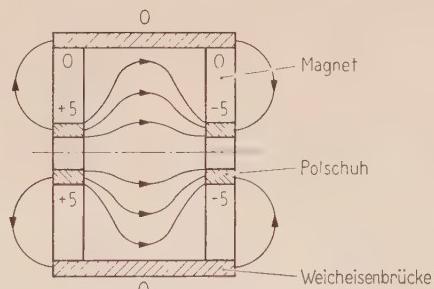


Bild 6. Feldbild eines 4π -Magnets.

eine Weicheisenbrücke verbunden. Die gesamte magnetische Spannung liegt zwischen den beiden Polschuhen, während an der Weicheisenbrücke kein Spannungsunterschied besteht und deshalb auch keine Kraftlinien austreten können. An den Stirnseiten der Polschuhe treten dagegen welche aus, so daß vor und hinter dem Magneten ein Feld vorhanden ist. Dieses Feld nimmt jedoch in axialer Richtung schneller ab als das des Rohrmagnets, weil die Magnetstäbe wie entgegengerichtete Dipole wirken.

Außer dem Rohr- und dem 4π -Magneten gibt es noch den Plattenmagneten (Bild 7c). Er ist eine Verbesserung des Rohrmagneten, weil er die Ein- und Auskopplung der HF-Energie mittels Hohlleiter innerhalb des Magnets erlaubt.

Aus Bild 5 können wir ersehen, daß beim Rohrmagneten der μ_A -Verlauf in der Magnetisierungs-

richtung nicht konstant ist. Deshalb ist der axiale Verlauf der Induktion ebenfalls inhomogen, und zwar so, daß bei langen Rohrmagneten die axiale Induktion in der Mitte des Magnets kleiner ist als an den Polen. Durch eine stetige Querschnittsverminderung von der Mitte des Magnets zu den Polen kann eine homogene axiale Induktion erreicht werden. GLASS [3] hat deshalb den Außendurchmesser eines Rohrmagnets konstant gehalten und den In-

nendurchmesser von der Mitte aus stetig vergrößert und gewinnt damit in der Nähe der Pole Raum für die Hohlleiter. Dieser Magnet ist eine Kombination von Rohr- und Plattenmagnet.

Für die drei Magnettypen, Rohr-, Platten- und 4π -Magnet, wollen wir zunächst mit der Analogon-Methode μ_A -Werte und Magnetgewichte verglichen. Das axiale Feld soll sich über 180 mm erstrecken und von einem Abschirmkasten 200 mm \times

200 mm \times 200 mm umgeben sein (Bild 7). Den Aufbau des Trogmodells für den 4π -Magneten zeigt Bild 8. Für alle drei Typen werden dieselben Magnetlängen, $l_M = 18$ cm, und Magnetquerschnitte angenommen, am Pol 35,5 cm 2 und in der Mitte des Magnets 52 cm 2 .

Damit wird aus dem Rohrmagnet ein „Tonnenmagnet“. Bei allen drei Magnetarten ist μ_A in der Magnetisierungsrichtung nicht konstant, d. h., daß die gewählte Querschnittsänderung noch zu klein war (Bild 7d). Der Tonnenmagnet liefert ohne und mit Abschirmung die kleinsten μ_A -Werte. Mit Abschirmung ist der 4π -Magnet etwas günstiger als der Plattenmagnet. Da man μ_A etwa proportional dem Gewicht des Magnetmaterials setzen darf, so ist aus Bild 7d das Gewicht der drei Typen für gleiches μ_A abschätzbar.

Wie man aus der Tabelle ersieht, ist der Gewichtsunterschied mit Abschirmung nicht mehr wesentlich, dagegen unterscheiden sich die drei Typen merklich bezüglich der Vermeidung von

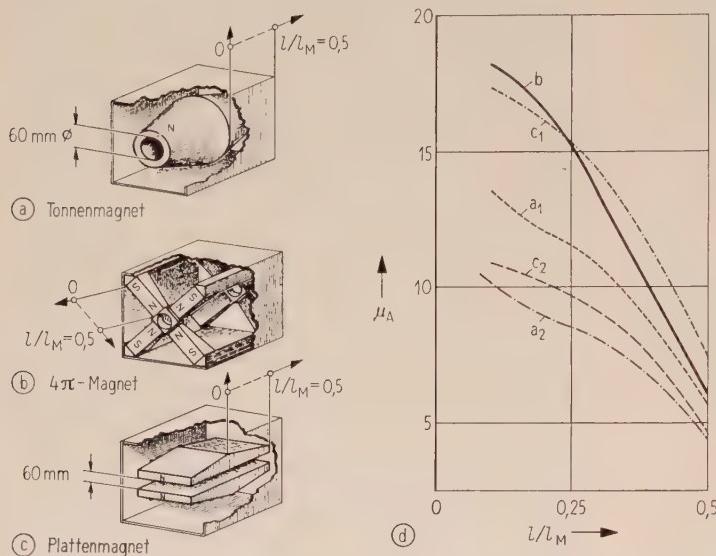


Bild 7. Vergleich der μ_A -Werte von Tonnen-, 4π - und Plattenmagnet. Die Kurven in Bild 7d bedeuten:

- a₁, a₂: Tonnenmagnet mit und ohne Abschirmung,
- b : 4π -Magnet mit Abschirmung,
- c₁, c₂: Plattenmagnet mit und ohne Abschirmung.

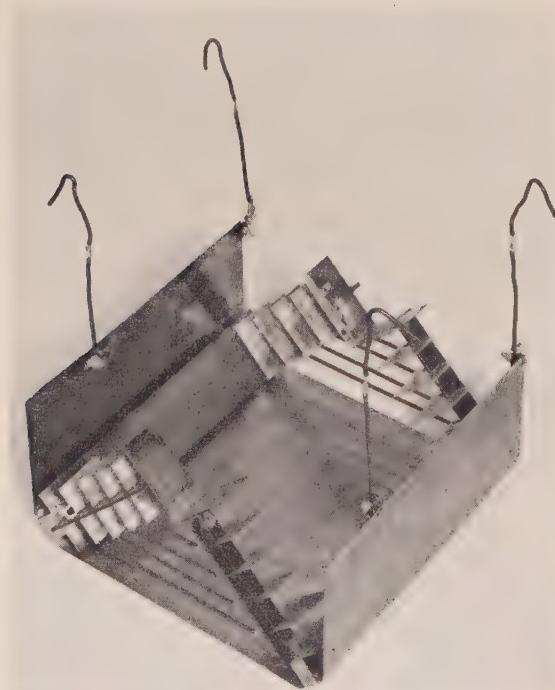


Bild 8. Trogmodell des 4π -Magnets.

Art	Gewicht ohne Abschirmung	Gewicht mit Abschirmung
Tonnenmagnet	3,65 kg	4,66 kg *
Plattenmagnet	3,95 kg	6,3 kg
4π -Magnet	—	5,5 kg

* Mit kleinerer Abschirmung, die ohne weiteres möglich wäre, würde sich ein größeres Magnetgewicht ergeben.

transversalen Störfeldern und der Art der HF-Einkopplung. Beim 4π -Magneten sind nämlich die magnetischen transversalen Störfelder merklich reduziert, weil die Magnetstäbe als Träger der magnetischen Störung den größten Abstand von der Achse haben. Die Ein- und Auskopplung der HF-Energie muß beim Tonnenmagneten koaxial erfolgen, während bei den beiden anderen Typen Hohlleiter anwendbar sind. Vor allem beim 4π -Magneten ist der zur Verfügung stehende Raum besonders groß, so daß Hohlleiter bis 1 GHz verwendet werden können.

Bei der Entwicklung eines 4π -Magnets für die Siemens-Wanderfeldröhre RW 3 waren einige neue magnetische Probleme zu lösen, die wir jetzt besprechen werden. Zur Fokussierung des Elektronenstrahls der Wanderfeldröhre wird ein bestimmter

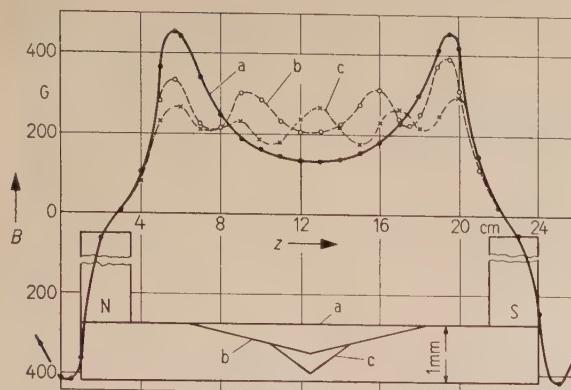


Bild 9. Einfluß des Führungsrohres auf den axialen Feldverlauf.

axialer Magnetfeldverlauf benötigt. Beim 4π -Magneten ist das axiale Feld immer an den Polen konzentriert und fällt zur Mitte hin ab (Bild 9, Kurve a). Auch wenn man zur Verbesserung der Homogenität die beiden Magnete mit einem Weich-eisenrohr von konstantem Querschnitt, dem Führungsrohr, verbindet, bleibt dieser Magnetfeldverlauf qualitativ erhalten. Der Felddurchgang kann angehoben werden, wenn der Spannungsabfall am mittleren Teil des Führungsrohrs vergrößert wird, z. B. durch Abdrehen desselben. Der Erfolg ist in Bild 9, Kurve b, deutlich zu sehen. Eine weitere Eindrehung ergibt ein neues Maximum in der Mitte. Man sieht leicht ein, daß eine kontinuierliche Schwächung des Querschnittes ein homogenes Feld zur Folge hat. Praktisch kann mit dem Führungsrohr jeder gewünschte Magnetfeldverlauf verwirklicht werden, z. B. ein zum Ausgang der Wanderfeldröhre ansteigendes Feld, um ein Aufspreizen des Elektronenstrahls auf Grund der durch die Phasenfokussierung erhöhten Gleichstromraumladung zu verhindern.

Das Material des Führungsrohrs muß eine kleine Permeabilität haben, damit man bei technisch vernünftigen Querschnittsänderungen keine zu großen Änderungen der axialen Feldstärke erhält. Es ist einfach zu berechnen, daß eine Durchmesseränderung von 0,1 mm eine axiale Feldstärkeänderung von 5% bewirkt, wenn die Permeabilität des Führungsrohrs 10 ist (gilt für einen Innendurchmesser des Führungsrohrs von 20 mm). Dagegen ändert sich bei $\mu = 100$ die Feldstärke bereits um 50%. Eine Permeabilität $\mu \leq 10$ kann mit einem Material kleiner Sättigungsspannung sicher erreicht werden.

Damit die HF-Energie mit einem Hohlleiter eingekoppelt werden kann, muß das Führungsrohr unterbrochen werden. Dann entsteht an diesem Luftspalt eine Feldspitze (Bild 10, Kurve b). Diese ist vermeidbar, wenn die Fläche der abgeschnittenen Enden des Führungsrohrs durch eine Weich-eisenscheibe vergrößert wird, deren Querschnitt $\mu_{\text{Führungsrohr}} \cdot \text{mal}$ größer ist als der des Führungsrohrs. Man erhält so im Luftspalt denselben magnetischen Widerstand pro Längeneinheit wie im Führungsrohr und damit einen weitgehend homogenen Feldverlauf (Bild 10, Kurve c).

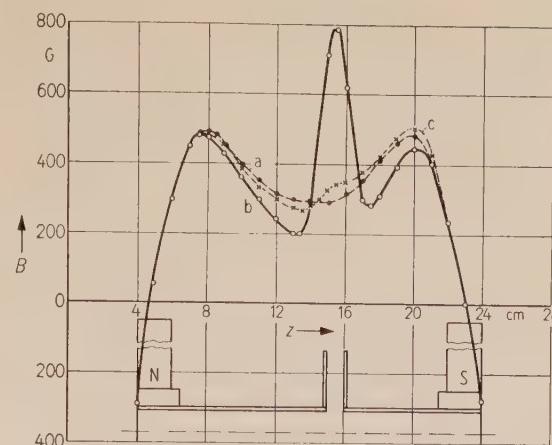


Bild 10. Unterbrechung des Führungsrohres;

Kurve a: durchgehendes Rohr,

Kurve b: unterbrochenes Rohr,

Kurve c: korrigierter Feldverlauf durch aufgesetzte Scheiben.

Ein wichtiges Problem bei der Herstellung der Magnete ist das Vermeiden bzw. das Beseitigen der transversalen magnetischen Störkomponenten¹, die durch kristalline Inhomogenitäten und Lunker in den Magnetstäben verursacht werden. Ohne besondere Maßnahmen bezüglich der Rotationssymmetrie können bei einem Rohr- und Plattenmagneten Transversalfelder bis zu 30 Gauß entstehen, während beim 4π -Magneten nur solche zwischen 1 und 2 Gauß auftreten. Diese Transversalfelder lenken den Elektronenstrahl einer Wanderfeldröhre so stark aus seiner Achse, daß ein großer Teil des Strahlstromes auf die Wendel geht, was natürlich unerwünscht ist und zur Zerstörung der Röhre führen kann. Aus der Bewegungsgleichung der Elektronen in Magnetfeldern läßt sich eine einfache Näherungs-lösung für die Ablenkung eines Elektronenstrahls im axialen Magnetfeld, dem ein Transversalfeld überlagert ist, ableiten. Es ist

$$\frac{B_T}{B_z} \approx \frac{\Delta r}{l}; \quad (7)$$

B_T bezeichnet das transversale, B_z das axiale Magnetfeld, l die Länge des Transversalfeldes und Δr die Auslenkung des Elektronenstrahls. Besonders zu erwähnen ist hierbei die Tatsache, daß der Elektronenstrahl in Richtung des Transversalfeldes ausgelenkt wird. Nehmen wir einmal an, die Auslenkung des Strahls soll 0,1 mm nicht überschreiten bei $B_z = 500$ Gauß, dann ist das Produkt $B_T l = 50$ Gauß mm, d. h., wenn sich das Transversalfeld über 100 mm erstreckt, darf es nur 0,5 Gauß groß sein.

Von CUTLER wurde eine Anordnung vorgeschlagen, welche vorhandene Transversalfelder sehr wirksam beseitigt. Sie ist eine Aneinanderreihung von hochpermeablen dünnen Scheiben, die durch nichtmagnetische Distanzringe voneinander getrennt sind. Auf Grund des kleinen μ_A -Wertes der dünnen Scheiben, $\mu_A \ll 1$, ist die Feldstärke in den

¹ Transversalfeld $B_T = \frac{B_{r\varphi} - B_{r\varphi+180^\circ}}{2}$.

Scheiben² (H_{EI}) wesentlich kleiner als die axiale Feldstärke (H_z). Deshalb ist die „azimutale Permeabilität“ der Scheiben sehr groß, und es kann entlang des Umfanges kein magnetischer Potentialunterschied bestehen, was wiederum bedeutet, daß transversale Störfelder beseitigt werden.

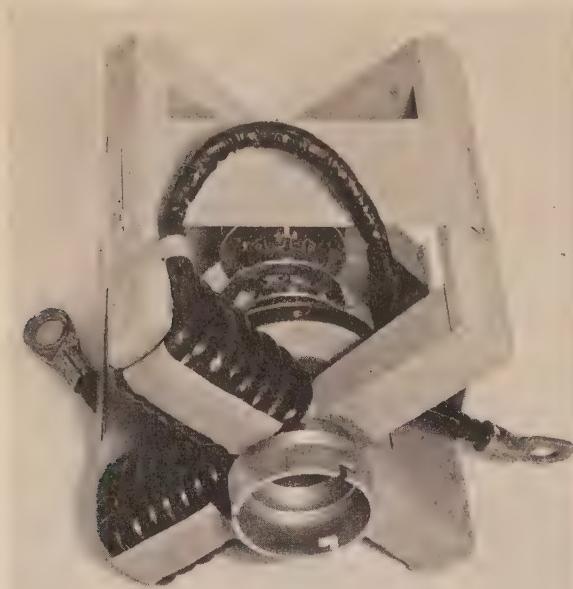


Bild 11. 4π-Magnet des 4-GHz-Sendevertstärkers.

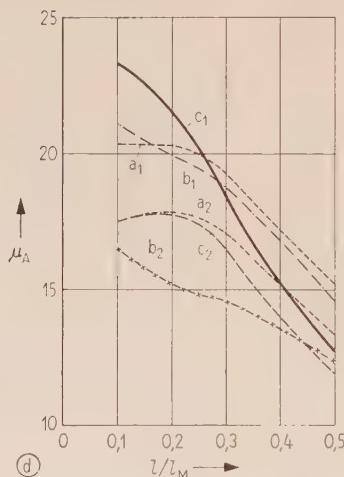
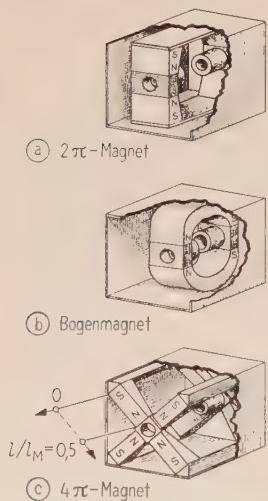


Bild 12. Vergleich der μ_A -Werte von Bogen-, 2π- und 4π-Magnet. Die Kurven in Bild 12d bedeuten:

- a₁, a₂: 2π-Magnet mit und ohne Abschirmung,
- b₁, b₂: Bogenmagnet mit und ohne Abschirmung,
- c₁, c₂: 4π-Magnet mit und ohne Abschirmung.

Den 4π-Magneten des 4-GHz-Sendevertstärkers der Wanderfeldröhre RW 3 zeigt Bild 11. Die mittlere axiale Induktion ist 500 Gauß. Die vier Magnet-

flügel sind senkrecht zur Achse angeordnet und, wie bereits erläutert, außen durch Weicheisenbrücken verbunden. Auf zwei Magnetstäben ist noch die Magnetisierungswicklung zu erkennen. Die Überbrückung des Führungsrohres für den Hohlleiter ist deutlich zu sehen.

Beim Rohr- und Plattenmagneten ohne Führungsrohr muß die axiale Induktion prinzipiell immer kleiner sein als die Koerzitivkraft des Magnetmaterials. Deshalb werden axiale Induktionen über 800 Gauß mit Bogen- oder π -Magneten erzeugt, weil bei diesen die Magnetlänge größer gewählt werden kann als die Luftspaltlänge. Bei der Entwicklung eines Fokussierungsfeldes für einen Millimeterwellenoszillator untersuchten wir, wie sich der Bogen-, der 2π - und der 4π -Magnet hierfür eignet. Es mußte eine homogene Induktion von 4000 Gauß über eine Länge von 2,5 cm erzeugt werden. Für alle drei Typen wurde wieder dieselbe Magnetlänge, $l_M = 18$ cm, und derselbe Magnetquerschnitt, am Pol $36,5 \text{ cm}^2$ und in der Stabmitte $55,2 \text{ cm}^2$, vorausgesetzt. Bild 12 zeigt den μ_A -Verlauf der drei Magnetarten, und zwar ohne und mit magnetischer Abschirmung, die beim Bogen- und 2π -Magneten $250 \text{ mm} \times 200 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$ und beim 4π -Magnet $200 \text{ mm} \times 200 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$ groß ist. Aus den μ_A -Werten ist zu ersehen, daß sich die drei Typen nur unmerklich unterscheiden. Ohne Abschirmung ist der Bogenmagnet der streuungssärmste, während mit Abschirmung alle drei gleichwertig sind.

4. Periodische Magnetfelder

Lange uniforme Magnete besitzen ein großes Streufeld im Außenraum, welches weitgehend das Magnetgewicht bestimmt. Unterteilt man ein Magnetrohr in einzelne Ringe und magnetisiert diese abwechselnd in entgegengesetzter Richtung, so vermindert sich das Streufeld wesentlich und damit auch das Magnetgewicht³. Der Verlauf der axialen magnetischen Induktion ist jetzt räumlich periodisch (Bild 13). Mit einem solchen Feld kann ein Elektronenstrahl ebenfalls fokussiert werden [4]. Die Berechnung eines periodischen Magnetfeldes mit Ringmagneten und Weicheisenpolschuhen wurde von mehreren Autoren durchgeführt [5], [6]. Die genauesten Ergebnisse erhält man aus der Methode nach [6], weil dort auch der Fluß zwischen den Polschuhen Φ_2 und Φ_3 (siehe Bild 13) berücksichtigt wird. Als Magnetmaterial werden meistens hartmagnetische Ferrite benutzt, weil diese wegen ihrer großen Koerzitiv-

kraft und kleinen Magnetisierung nur sehr wenig entmagnetisiert werden können. Die Polschuhe bestehen aus einem hochpermeablen Weicheisen, damit die magnetischen Transversalfelder klein gehalten werden. Bild 13 zeigt die mögliche axiale

³ Diese Anordnung wurde von PIERCE vorgeschlagen.

$${}^2 H_{EI} = \frac{H_z}{1 + \frac{1}{1 + \mu_A} (\mu - 1)} .$$

Induktion in Abhängigkeit der geometrischen Abmessungen für Siferrit DE-Ringmagnete, die eine Koerzitivkraft von 2000 Oersted besitzen. Die Berechnung hierfür ist ähnlich der von [6]. Die Induktionswerte gelten für einen optimalen Luftspalt g zwischen den Polschuhen.

Die Ringmagnete sind nicht das einzige System, mit dem man einen periodischen Feldverlauf erzeugen kann. Bild 14 zeigt ein periodisches Magnetfeld, das aus einzelnen Weicheisenpolschuhen besteht.

Die abwechselnd an einen magnetischen Nord- und Südpol angeschlossen sind, wodurch wieder der axiale periodische Feldverlauf erzwungen wird. Die Polschuhe gleicher Polarität werden zu je zwei Reihen zusammengefaßt, zwischen denen die Magnetstäbe angeordnet sind, die jetzt aus Alnico V bestehen. Die vier Magnetstäbe sind parallel geschaltet.

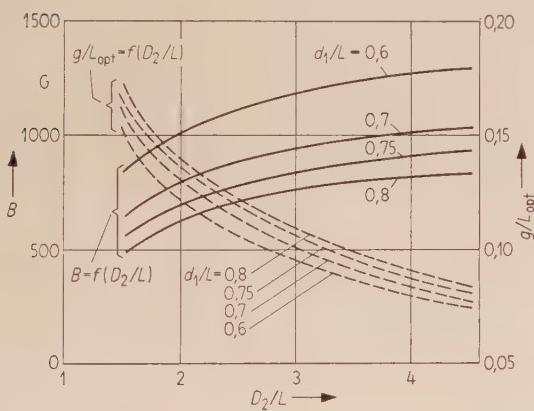
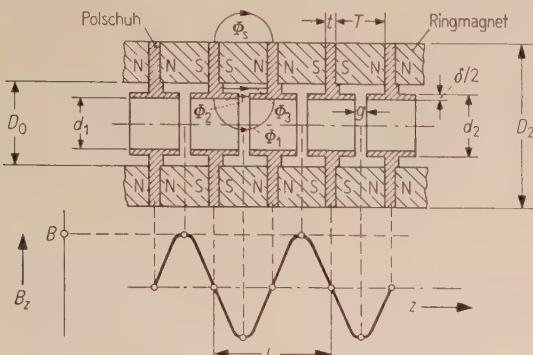


Bild 13. Periodisches Magnetfeld mit Siferrit DE-Ringmagneten; $H_c = 2000$ Oe, $T/L = 0,4$, $K = 1,6$ G/Oe, $\delta/L = 0,1$.

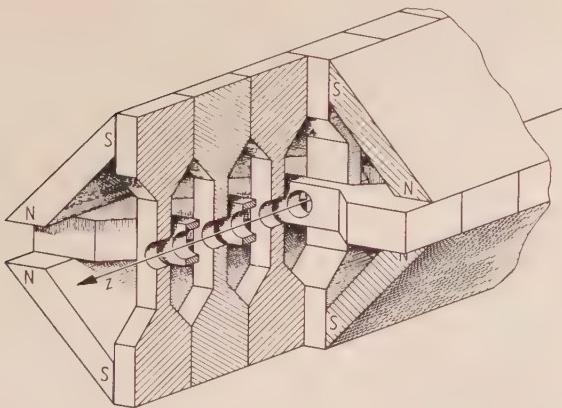


Bild 14. Periodisches Magnetfeld, bestehend aus interdigitalen Weicheisenpolschuhen und parallel geschalteten Alnicomagneten.

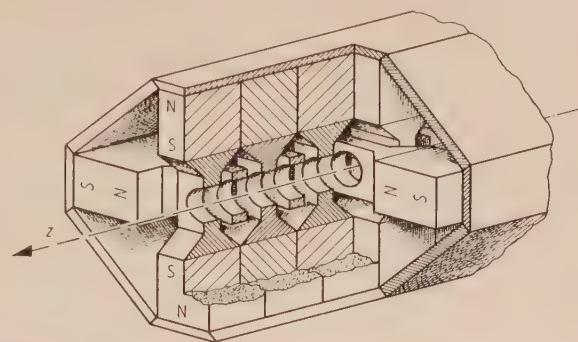


Bild 15. Periodisches Magnetfeld mit je zwei in Reihe geschalteten Alnicomagneten.

Eine weitere Möglichkeit ist in Bild 15 dargestellt, hierbei sind jeweils zwei Magnetstäbe in Reihe geschaltet. Diese Anordnung hat eine kleinere magnetische Streuung und ist nach außen magnetisch neutral, während die Anordnung nach Bild 14 noch ein Streufeld im Außenraum besitzt. Dieses Streufeld kann ohne zusätzliche Belastung des Magnets abgeschirmt werden, wenn zwischen Magnet und Ab-

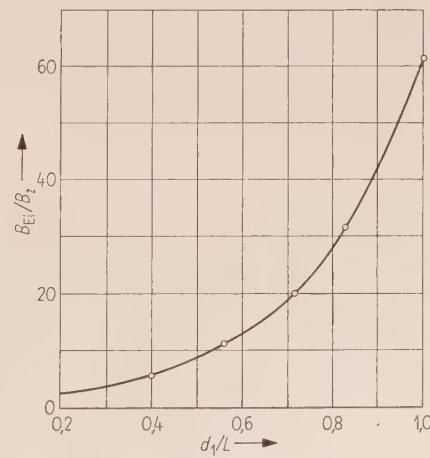
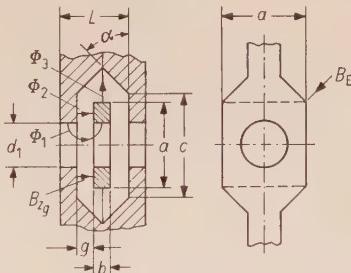


Bild 16. Hilfskurve zur Dimensionierung des Interdigitalmagneten; Parameter: $g/b = 1$, $a/d_1 = 1,65$, $c/a = 1,2$, $\alpha = 45^\circ$.

schirmung im Hauptstreuflußbereich hartmagnetische Ferrite angeordnet werden.

Prinzipiell ist beim „Interdigitalmagnet“ die Magnetstablänge unabhängig von den axialen Abmessungen der Polschuhe (Periode und Luftspalt). Im Gegensatz hierzu ist beim Ringmagnetsystem die Magnetlänge abhängig von der Periode, d. h., daß bei kleiner werdender Magnetfeldperiode sich auch die magnetische Spannung verkleinert. Deshalb wird beim Ringmagneten die erreichbare axiale Induktion durch die Koerzitivkraft des Magnetmaterials begrenzt. Dagegen wird beim Interdigitalmagneten die Grenzinduktion nur durch die Sättigung der Weicheisenpolschuhe bestimmt.

Ein Interdigitalmagnet kann nach Bild 16 dimensioniert werden. Diese Hilfskurve wurde mit einer Modellmessung im elektrolytischen Trog bestimmt. Nach [7] ergibt sich eine minimale Induktion B_{E1} im Polschuh, wenn die Polschuhdicke b gleich dem Luftspalt g ist. Deshalb wurde in der Modellmessung $g/b = 1$ gewählt. Außerdem will man den Streufluß Φ_3 klein halten, es muß also der Wert c/a (Bild 16) möglichst groß sein.

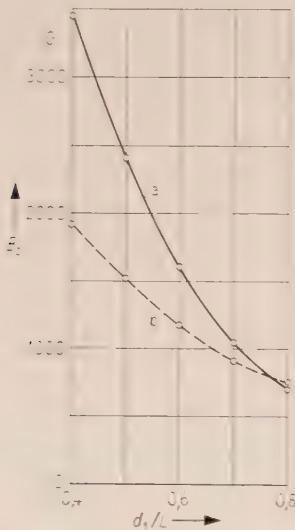


Bild 17. Vergleich zwischen Ring- und Interdigitalsystem.

Kurve a: Interdigitalsystem.

Parameter: $B_{E1} = 20000$ Gauß
(nach Bild 16).

Kurve b: Ringsystem (Siferrit DE).

Parameter: $H_c = 2000$ Oersted
(nach Bild 13).

Es ist möglich, das Ring- und Interdigitalsystem miteinander zu vergleichen, wenn man die maximal erreichbare Induktion B_z in Abhängigkeit von d_1/L darstellt (Bild 17). Wesentlicher Parameter ist beim Interdigitalsystem die Sättigungsinduktion im Polschuh und beim Ringsystem die Koerzitivkraft. Für eine axiale Induktion von etwa 800 Gauß sind beide Systeme gleichwertig, während bei größerer Induktion das Interdigitalsystem dem Ringsystem zum

Teil wesentlich überlegen ist. Der physikalische Grund hierfür ist die unterschiedliche Abhängigkeit der Induktion im Spalt B_{z_g} (siehe Bild 16) von der Magnetfeldperiode.

Beim Ringsystem bleibt diese fast konstant, während sie beim Interdigitalsystem etwa linear mit der Periode wächst.

Zum Schluß wollen wir noch die anderen magnetischen und konstruktiven Eigenschaften der beiden Systeme betrachten. Das Ringsystem wird immer das kleinste Gewicht haben. Beim Interdigitalsystem werden die Amplituden der Induktion sehr gleichmäßig sein, weil die Polschuhe mit gemeinsamer Polarität an dasselbe magnetische Potential angeschlossen sind. Dagegen müssen beim Ringsystem die Ringe einzeln entmagnetisiert oder ausgesucht werden, um gleichmäßige Induktionen zu erhalten. Die Feldüberbrückung für die Hohlleiter ist beim Interdigitalsystem nach Bild 14 besonders einfach. Man ordnet nach dem Hohlleiter einen weiteren Polschuh an, welcher an den magnetischen Gegenpol angekoppelt wird. Hierfür sind keine zusätzlichen Magnete nötig wie beim Ringsystem. Der Polschuhkörper des Interdigitalsystems ist sehr stabil und kann als Basis für die Hohlleiter dienen. Außerdem ist der Temperaturgang der Alnico-Magnete um eine Größenordnung kleiner als bei den hartmagnetischen Ferriten.

Für viele Anregungen und Diskussionen danke ich besonders Herrn Dr. W. VEITH, für die Durchführung zahlreicher Versuche und Berechnungen den Herren D. ROHNER, G. KEIL und F. EDER.

Bezeichnungen

- μ_0 Permeabilität der Luft = $1 \text{ G} \cdot \text{Oe}^{-1}$,
- μ_A Permeabilität im Arbeitspunkt eines Magnets in $\text{G} \cdot \text{Oe}^{-1}$,
- B magnetische Induktion in G,
- H magnetische Feldstärke in Oe,
- V magnetische Spannung in Oe · cm,
- Φ magnetischer Fluß in $\text{G} \cdot \text{cm}^2$,
- $1/R_\mu$ magnetischer Leitwert in $\text{G} \cdot \text{Oe}^{-1} \text{ cm}$.

Schrifttum

- [1] FISCHER, J., Abriss der Dauermagnetkunde. Springer-Verlag, Berlin 1949.
- [2] DE BENNETOT, M., Sur le calcul des aimants permanents de forme « tubulaire ». Onde élect. **34** [1954], 193–216.
- [3] DE BENNETOT, M., Aimants permanents pour tubes électroniques en hyperfréquences. Onde élect. **35** [1955], 747–763.
- [4] GLASS, M. S., Straight field permanent magnets of minimum weight for TWT-focusing-design and graphic aid in design. Proc. Inst. Radio Engrs. **45** [1957], 1100–1105.
- [5] MENDEL, J. T., QUATE, C. F. und YOCOM, W. H., Electron beam focusing with periodic permanent magnet field. Proc. Inst. Radio Engrs. **42** [1954], 800–810.
- [6] CHANG, K. K. N., Optimum design of periodic magnet structures for electron beam focusing. RCA Rev. **16** [1955], 65–81.
- [7] STERZER, F. und SIEKANOWICZ, W. W., The design of periodic permanent magnets for focusing of electron beams. RCA Rev. **18** [1957], 39–59.
- [8] CAHEN, O., La focalisation des faisceaux d'électrons par un champ magnétique longitudinal alterné. Ann. Télécommun. **11** [1956], 142–150.

Das Einschalten von zwei Schwingungskreisen, die über eine fremdgesteuerte Reaktanz gekoppelt sind (Fall des parametrischen Verstärkers)

von HEINRICH KADEN

Mitteilung aus dem Zentral-Laboratorium der Siemens & Halske AG, München

(A.E.U. 15 [1961], 475–481; eingegangen am 22. Juli 1961)

DK 621.372.41.064:621.375.9

Die Behandlung des Einschaltproblems eines parametrischen Verstärkers führt zunächst zu den Eigenschwingungen, die durch den Schaltvorgang eingeleitet werden. Sie liefern ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Stabilität der Anordnung. Maßgebend hierfür sind der Aussteuerungsfaktor der fremdgesteuerten Reaktanz, die Kopplungsfaktoren sowie die Gütezahlen und das Verhältnis der Resonanzfrequenzen der beiden Kreise. Je mehr sich die Resonanzfrequenzen unterscheiden, um so größere Verstärkungen lassen sich erzielen (gleiche Gütezahlen der Kreise vorausgesetzt), ohne das Stabilitätskriterium zu verletzen. Dabei ist es gleichgültig, ob dieses Verhältnis v größer oder kleiner als eins ist. Betrachtet man jedoch die Einschwingdauer, so zeigt sich, daß sie am kürzesten ist, wenn man die Resonanzfrequenz des Blindkreises (idling circuit) größer macht als die des Primärkreises ($v > 1$). Bemäßt man beispielsweise den Verstärker für einen stationären Verstärkungsfaktor 4, so ist er stabil sowohl für $v = 10$ als auch für $v = 0,1$. Im ersten Fall dauert die Einschwingzeit um den Faktor 6 länger als bei dem trivialen Schwingungskreis ohne Fremdsteuerung. Würde man jedoch $v = 0,1$ wählen, so ist der Faktor anstatt 6 jetzt 60. Der physikalische Grund für dieses Verhalten ist, daß im ersten Fall, bei dem die Resonanzfrequenz des Blindkreises 10mal höher ist, seine Reaktanzen kleiner sind als im Primärkreis. Infolgedessen ist weniger Zeit nötig, die Blindleistungen aufzubauen, als im zweiten Fall mit den großen Reaktanzen im Blindkreis.

The discussion of the connect problem of a parametric amplifier leads first to the natural oscillations caused by the switching process. They furnish a necessary and sufficient criterion for the stability of the arrangement. Determining factors are the driving factor of the externally controlled reactance, the coupling factors, storage factors, and the ratio of the resonant frequencies of the two circuits. The wider apart the resonant frequencies, the higher gains can be attained (under the assumption of equal storage factors of the circuits) without infringing the stability criterion. It is inconsequential in this respect whether this ratio v is greater or smaller than unity. If, however, the buildup time is considered, it turns out that it becomes a minimum if the resonant frequency of the idling circuit is made higher than that of the primary circuit ($v > 1$). If, for instance, the amplifier is proportioned for a steady-state amplification factor 4, it will be stable for $v = 10$ as well as for $v = 0.1$. In the first case the buildup lasts six times longer than with the trivial tuned circuit without external control. If, however, $v = 0.1$ were chosen, this factor is 60 rather than 6. The physical cause underlying this behavior is the fact that in the first case, where the resonant frequency of the idling circuit is ten times higher, its reactances are lower than in the primary circuit. Less time is thus required for building up the reactive energy than in the second case with the large reactances in the idling circuit.

1. Einleitung

Wir hatten bereits in einer früheren Arbeit [3] den Einschaltvorgang eines einzigen Schwingungskreises mit einer gesteuerten Reaktanz behandelt. In Fortführung dieser Untersuchungen befassen wir uns im folgenden mit zwei Schwingungskreisen, die über eine fremdgesteuerte Reaktanz miteinander gekoppelt sind, ein Fall, wie er bei parametrischen Verstärkern vorliegt. In Bild 1 ist der Schaltvorgang angedeutet, der zur Zeit $t = 0$ eingeleitet wird. Es sind jeweils zwei Schaltungen mit je zwei Schwin-

gungskreisen a und b gezeichnet; beide Schaltungen sind einander reziprok. Wir behandeln künftig nur die linke Schaltung mit den Reihenschwingungskreisen und bemerken, daß sämtliche Ergebnisse auch für die Schaltung mit den Parallelschwingungskreisen gültig sind; man braucht nur L durch C , C durch L und R durch G zu ersetzen. Die Koppelreaktanz ist im linken Schaltbild eine Induktivität L_k , die periodisch mit der Kreisfrequenz $\omega_a + \omega_b$ gesteuert wird nach der Beziehung

$$L_k = L_0 [1 + l \cos(\omega_a + \omega_b)t]. \quad (1)$$

Die Größen ω_a und ω_b sind die Resonanzfrequenzen der Kreise a und b :

$$\omega_a^2 = \frac{1}{C_a(L_a + L_0)}, \quad \omega_b^2 = \frac{1}{C_b(L_b + L_0)}. \quad (2)$$

Die dimensionslose Größe l bezeichnen wir als den Aussteuerungsfaktor. Die Frequenz der eingeschalteten Wechselspannung stimmt mit der Resonanzfrequenz ω_a des Kreises a überein. Die Frequenz ω_b des sogenannten Blindkreises (engl. idling circuit)

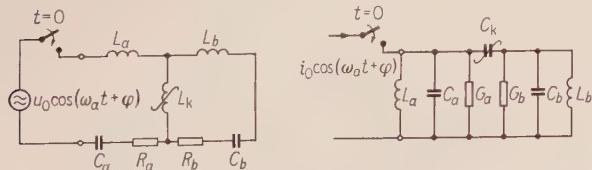


Bild 1. Das Einschalten eines parametrischen Verstärkers aus zwei gekoppelten Schwingungskreisen a und b zur Zeit $t = 0$.

muß von ω_a verschieden sein ($\omega_a \neq \omega_b$). Durch den Schaltvorgang werden die Eigenschwingungen angeregt, die entweder gedämpft oder anschwellend sein können. Im ersten Fall haben wir es mit einer stabilen Schaltung zu tun, bei der sich nach Ablauf einer hinreichend langen Zeit der stationäre Endzustand einstellt, während im zweiten Fall die Schwingungsamplituden mit der Zeit ins Unendliche wachsen. Wir befassen uns zunächst mit den Eigenschwingungen.

2. Eigenschwingungen

Die Eigenschwingungen stellen sich ein, wenn man die Eingangsklemmen in Bild 1 kurzschließt bzw. offen läßt, je nachdem, ob es sich um die Reihen- oder Parallel-Schwingungskreise handelt (Bild 2). Als Schwingungsgröße betrachten wir

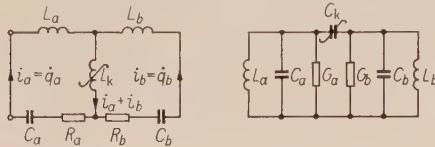


Bild 2. Zur Berechnung der Eigenschwingungen von zwei gekoppelten Schwingungskreisen. L_k , C_k fremdgesteuerte Koppelinduktivität bzw. -kapazität.

zweckmäßigerweise in der links stehenden Schaltung die Ladungen

$$q_a^{(e)} = \int i_a^{(e)} dt \quad \text{und} \quad q_b^{(e)} = \int i_b^{(e)} dt, \quad (3)$$

die wir mit dem oberen Index e versehen haben, der den Zustand der Eigenschwingungen kennzeichnen soll. Die Größen $i_a^{(e)}$ und $i_b^{(e)}$ bedeuten daher die Ströme in den beiden Kreisen, und es ist daher im allgemeinen $\dot{q} \equiv dq/dt = i$. Die Bedingungen des Spannungsgleichgewichts in jedem Schwingungskreis liefern dann folgende beiden simultanen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} L_a \ddot{q}_a^{(e)} + R_a \dot{q}_a^{(e)} + \frac{q_a^{(e)}}{C_a} + \\ + L_k (\ddot{q}_a^{(e)} + \ddot{q}_b^{(e)}) + \dot{L}_k (\dot{q}_a^{(e)} + \dot{q}_b^{(e)}) = 0, \\ L_b \ddot{q}_b^{(e)} + R_b \dot{q}_b^{(e)} + \frac{q_b^{(e)}}{C_b} + \\ + L_k (\ddot{q}_b^{(e)} + \ddot{q}_a^{(e)}) + \dot{L}_k (\dot{q}_b^{(e)} + \dot{q}_a^{(e)}) = 0 \\ (\ddot{q} \equiv d^2 q / dt^2 = di / dt). \end{aligned} \quad (4)$$

Sie lassen sich nun auf eine normierte Form bringen, indem wir folgende dimensionslose Begriffe einführen. Zunächst definieren wir die Kopplungsfaktoren zu

$$\kappa_a = \frac{L_0}{L_a + L_0}, \quad \kappa_b = \frac{L_0}{L_b + L_0}, \quad (5)$$

die ein Maß für die Kopplung zwischen den Kreisen sind; sie werden im folgenden als klein gegen eins vorausgesetzt ($\kappa_a \ll 1; \kappa_b \ll 1$). Wir benutzen ferner die Gütezahlen Q der Kreise:

$$Q_a = \frac{\omega_a (L_a + L_0)}{R_a}, \quad Q_b = \frac{\omega_b (L_b + L_0)}{R_b}, \quad (6)$$

die groß gegen eins sein sollen ($Q_a \gg 1; Q_b \gg 1$). An Stelle der unabhängigen Zeitvariablen t nehmen wir die normierte Zeit

$$x = \omega_a t, \quad \omega_b t = vx \quad \text{mit} \quad v = \omega_b / \omega_a \quad (7)$$

(v Verhältnis der Resonanzfrequenzen, $v \neq 1$). Führen wir jetzt noch die Gl. (1) für L_k in Gl. (4) ein, so entstehen folgende Differentialgleichungen in normierter Form:

$$\begin{aligned} [1 + \kappa_a l \cos(1 + v)x] \frac{d^2 q_a^{(e)}}{dx^2} + \\ + \left[\frac{1}{Q_a} - \kappa_a l (1 + v) \sin(1 + v)x \right] \frac{dq_a^{(e)}}{dx} + q_a^{(e)} + \\ + \kappa_a [1 + l \cos(1 + v)x] \frac{d^2 q_b^{(e)}}{dx^2} - \\ - \kappa_a l (1 + v) \sin(1 + v)x \frac{dq_b^{(e)}}{dx} = 0, \quad (8) \\ [1 + \kappa_b l \cos(1 + v)x] \frac{d^2 q_b^{(e)}}{dx^2} + \\ + \left[\frac{v}{Q_b} - \kappa_b l (1 + v) \sin(1 + v)x \right] \frac{dq_b^{(e)}}{dx} + v^2 q_b^{(e)} + \\ + \kappa_b [1 + l \cos(1 + v)x] \frac{d^2 q_a^{(e)}}{dx^2} - \\ - \kappa_b l (1 + v) \sin(1 + v)x \frac{dq_a^{(e)}}{dx} = 0. \end{aligned}$$

Wir versuchen, sie nun mit den Ansätzen

$$q_a^{(e)} = e^{\mu x} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_{\nu} e^{i\nu(1+v)x}, \quad (9a)$$

$$q_b^{(e)} = e^{\mu x} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} B_{\nu} e^{i\nu(1+v)x} \quad (9b)$$

zu lösen, in denen die Eigenwerte μ sowie die Amplituden A_{ν} und B_{ν} noch unbekannte Konstanten sind. Um sie zu bestimmen, hat man mit den Ansätzen (9) in die Gl. (8) einzugehen. Es entstehen dann Terme mit verschiedenen Schwingungsfaktoren. Um die Gl. (8) befriedigen zu können, muß die Summe aller Terme mit dem gleichen Schwingungsfaktor für sich verschwinden. Auf diese Weise erhält man zwei homogene Systeme von unendlich vielen Gleichungen für die Konstanten μ , A_{ν} und B_{ν} , die sich nur näherungsweise lösen lassen. Für unsere Zwecke ist es ausreichend, wenn wir uns dabei auf die insgesamt sechs Konstanten A_{-1} , A_0 , A_1 und entsprechend B_{-1} , B_0 , B_1 beschränken ($\nu = -1; 0; 1$) und alle anderen Konstanten vernachlässigen. Wir erhalten auf diese Weise ein homogenes System von sechs linearen Gleichungen. Es lautet

$$\begin{aligned} \left(\mu^2 + \frac{\mu}{Q_a} + 1 \right) A_0 + \frac{1}{2} \kappa_a l \mu [\mu_1 (A_1 + B_1) + \\ + \mu_{-1} (A_{-1} + B_{-1})] + \kappa_a \mu^2 B_0 = 0, \quad (10a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\mu^2 + \frac{\mu v}{Q_b} + v^2 \right) B_0 + \frac{1}{2} \kappa_b l \mu [\mu_1 (B_1 + A_1) + \\ + \mu_{-1} (B_{-1} + A_{-1})] + \kappa_b \mu^2 A_0 = 0, \quad (10b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \kappa_a l \mu \mu_1 (A_0 + B_0) + \\ + \left(1 + \frac{\mu_1}{Q_a} + \mu_1^2\right) A_1 + \kappa_a \mu_1^2 B_1 = 0, \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \kappa_b l \mu \mu_1 (B_0 + A_0) + \\ + \left(v^2 + \frac{\mu_1 v}{Q_b} + \mu_1^2\right) B_1 + \kappa_b \mu_1^2 A_1 = 0, \end{aligned} \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \kappa_a l \mu \mu_{-1} (A_0 + B_0) + \\ + \left(1 + \frac{\mu_{-1}}{Q_a} + \mu_{-1}^2\right) A_{-1} + \kappa_a \mu_{-1}^2 B_{-1} = 0, \end{aligned} \quad (11c)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \kappa_b l \mu \mu_{-1} (B_0 + A_0) + \\ + \left(v^2 + \frac{\mu_{-1} v}{Q_b} + \mu_{-1}^2\right) B_{-1} + \kappa_b \mu_{-1}^2 A_{-1} = 0. \end{aligned} \quad (11d)$$

Hierin bedeuten μ_1 und μ_{-1} Abkürzungen für die Ausdrücke

$$\mu_1 = \mu + i(1+v), \quad \mu_{-1} = \mu - i(1+v). \quad (12)$$

Wir lösen dieses System nach dem Prinzip der schrittweisen Annäherung. Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst die

1. Näherung.

Diese ergibt sich, wenn wir die Koppelinduktivität L_k als konstant annehmen, d. h., daß wir den Aussteuerungsfaktor $l = 0$ setzen. In diesem trivialen Fall haben wir in Gl. (10a) und (10b) zwei Gleichungen für A_0/B_0 und μ . Eliminiert man den Quotienten A_0/B_0 , so erhält man folgende Gleichung vierten Grades für μ :

$$\left(\mu^2 + \frac{\mu}{Q_a} + 1\right) \left(\mu^2 + \frac{\mu v}{Q_b} + v^2\right) = \kappa_a \kappa_b \mu^4, \quad (13)$$

die vier Wurzeln hat. Wir verzichten auf ihre exakte Bestimmung und machen davon Gebrauch, daß die Gütezahlen Q groß und die Kopplungsfaktoren κ klein gegen eins sind, so daß wir die Quadrate von $1/Q$ und κ vernachlässigen können. Dann ergeben sich folgende Formeln für die Eigenwerte: (14)

$$\begin{aligned} \mu_{aI} &= i \left[1 + \frac{\kappa_a \kappa_b}{2(1-v^2)}\right] - \frac{1}{2 Q_a} \approx i - \frac{1}{2 Q_a}, \\ \mu_{aII} &= -i \left[1 + \frac{\kappa_a \kappa_b}{2(1-v^2)}\right] - \frac{1}{2 Q_a} \approx -i - \frac{1}{2 Q_a}, \\ \mu_{bI} &= iv \left[1 + \frac{\kappa_a \kappa_b}{2(1-v^2)}\right] - \frac{v}{2 Q_b} \approx iv - \frac{v}{2 Q_b}, \\ \mu_{bII} &= -iv \left[1 + \frac{\kappa_a \kappa_b}{2(1-v^2)}\right] - \frac{v}{2 Q_b} \approx -iv - \frac{v}{2 Q_b}. \end{aligned}$$

Die übrigen vier Gleichungen (11) lassen sich nur dann befriedigen, wenn $A_{-1} = B_{-1} = A_1 = B_1 = 0$ ist. — Wie man erkennt, setzen sich alle vier Eigenwerte aus je zwei Termen zusammen, und zwar einem imaginären Teil, der die jeweilige Resonanzfrequenz bestimmt, und einem reellen Teil, der für

die Dämpfung der Schwingungen infolge der Verluste maßgebend ist. Da wir uns im folgenden vor allem für die Dämpfung interessieren, wollen wir die geringe Korrektur der Resonanzfrequenzen durch die Kopplungen außer Acht lassen und mit den Näherungsformeln in Gl. (14) rechnen.

2. Näherung

Wir nehmen jetzt den Aussteuerungsfaktor l als von Null verschieden an ($0 < l \leq 1$) und betrachten zunächst die erste der vier Wurzeln in Gl. (14) näher, nämlich den Eigenwert μ_{aI} . Das bedeutet, daß wir im Primärkreis a nach Gl. (9a) eine Schwingung haben, deren Amplitude wir A_{0I} nennen und deren Frequenz die Resonanzfrequenz ω_a ist. Es läßt sich nachweisen, daß dann im Blindkreis b eine Schwingung mit der diesem Kreis eigenen Resonanzfrequenz $-\omega_b = -v\omega_a$ vorherrscht, deren Amplitude B_{-1} ist ($v = -1$ in Gl. (9b)). Alle anderen Amplituden A_{-1} , A_1 , B_0 und B_1 sind im Vergleich zu A_{0I} und B_{-1} klein (wegen $\kappa_a \ll 1$ und $\kappa_b \ll 1$) und daher mit guter Annäherung vernachlässigbar. Wir bestimmen B_{-1} aus Gl. (11d) und erhalten, indem wir nach Gl. (12) $\mu_{-1} = -iv - 1/2 Q_a$ nehmen, die Beziehung

$$B_{-1} = \frac{i \lambda_b / v}{(Q_b/v Q_a) - 1} A_{0I}. \quad (15)$$

Mit diesem Wert für B_{-1} gehen wir in Gl. (10a) ein und erhalten damit eine Korrektur des Eigenwertes μ_{aI} . Eine einfache Rechnung ergibt jetzt den neuen Wert von μ_{aI} zu

$$\mu_{aI} = i - \frac{1}{2 Q_a} \left[1 + \frac{\lambda_a \lambda_b}{(Q_b/v Q_a) - 1}\right]. \quad (16)$$

Wir bezeichnen die dimensionslosen Größen λ_a und λ_b als Verstärkungsparameter; sie sind definiert durch

$$\lambda_a = \frac{1}{2} \kappa_a l Q_a, \quad \lambda_b = \frac{1}{2} \kappa_b l Q_b. \quad (17)$$

Wie man erkennt, sind sie den Kopplungsfaktoren sowie den Gütezahlen und dem Aussteuerungsfaktor l proportional; sie können in der Größenordnung von eins liegen.

Dasselbe Verfahren führen wir jetzt mit dem Eigenwert μ_{aII} durch. Die zugehörige Amplitude im Kreis a nennen wir dementsprechend A_{0II} , und die Resonanzfrequenz ist $-\omega_a$. Mit dieser Schwingung korrespondiert im Blindkreis die Schwingung der Frequenz $\omega_b = v\omega_a$ ($v = 1$) mit der Amplitude B_1 , die man aus Gl. (11b) erhält. (In diesem Fall werden A_{-1} , A_1 , B_0 und B_{-1} vernachlässigt.) Der neue Eigenwert ergibt sich dann wiederum aus Gl. (10a). — Das gleiche Verfahren wiederholt sich für die Eigenwerte μ_{bI} und μ_{bII} . Jetzt dominieren die Amplituden B_{0I} und B_{0II} im Kreis b , wobei im Primärkreis a die Schwingungen mit den Amplituden A_{-1} bzw. A_1 hinzukommen. Die zu berücksichtigenden Gleichungen sind einerseits Gl. (10b) und entweder Gl. (11c) für A_{-1} oder Gl. (11b) für A_1 . Alle Ergebnisse sind in der Tabelle I zusammengefaßt.

Tabelle I

Anregung durch Kreis a	$\mu_{aI} = i - \frac{1}{2Q_a} \left[1 + \frac{\lambda_a \lambda_b}{(Q_b/v Q_a) - 1} \right]$	$\mu_{aII} = -i - \frac{1}{2Q_a} \left[1 + \frac{\lambda_a \lambda_b}{(Q_b/v Q_a) - 1} \right]$
	$\frac{B_{-1}}{A_{0I}} = \frac{i \lambda_b / v}{(Q_b/v Q_a) - 1}$	$\frac{B_1}{A_{0II}} = -\frac{i \lambda_b / v}{(Q_b/v Q_a) - 1}$
Anregung durch Kreis b	$\mu_{bI} = iv - \frac{v}{2Q_b} \left[1 + \frac{\lambda_a \lambda_b}{(v Q_a/Q_b) - 1} \right]$	$\mu_{bII} = -iv - \frac{v}{2Q_b} \left[1 + \frac{\lambda_a \lambda_b}{(v Q_a/Q_b) - 1} \right]$
	$\frac{A_{-1}}{B_{0I}} = \frac{i \lambda_a v}{(v Q_a/Q_b) - 1}$	$\frac{A_1}{B_{0II}} = -\frac{i \lambda_a v}{(v Q_a/Q_b) - 1}$

In allen Relationen müssen wir den Fall $Q_b = v Q_a$ ausschließen. Formal werden alle Größen hierfür unendlich, was natürlich mit den Näherungen zusammenhängt. In Wirklichkeit bleiben sie endlich; sie sind aber in diesem Punkt sehr labil, d.h., sie ändern sich bei ganz kleinen Abweichungen von $Q_b = v Q_a$ außerordentlich stark, so daß wir mit Recht von diesem Sonderfall absehen können.

Gemäß den vier Eigenwerten setzen sich die Eigenschwingungen der Ladungen jeweils aus vier Termen zusammen. Führt man die gefundenen Werte aus Tabelle I in Gl. (9) ein, so gewinnt man die Ausdrücke

$$q_a^{(e)} = A_{0I} e^{\mu_{aI} x} + A_{0II} e^{\mu_{aII} x} + \frac{i \lambda_a v}{(v Q_a/Q_b) - 1} \times \\ \times [B_{0I} e^{(\mu_{bI} - i - iv)x} - B_{0II} e^{(\mu_{bII} + i + iv)x}], \quad (18a)$$

$$q_b^{(e)} = B_{0I} e^{\mu_{bI} x} + B_{0II} e^{\mu_{bII} x} + \frac{i \lambda_b / v}{(Q_b/v Q_a) - 1} \times \\ \times [A_{0I} e^{(\mu_{aI} - i - iv)x} - A_{0II} e^{(\mu_{aII} + i + iv)x}]. \quad (18b)$$

Die vier Konstanten A_{0I} , A_{0II} , B_{0I} und B_{0II} bleiben noch unbestimmt; sie erhalten feste Werte durch die Anfangsbedingungen, auf die wir erst anlässlich der Behandlung des Einschaltvorganges eingehen.

Man erkennt bereits aus der Betrachtung der Dämpfungskonstanten (Realteile der Eigenwerte μ_a und μ_b) in Tabelle I, daß für die Stabilität der Anordnung die Bedingung $\lambda_a \lambda_b < 1$ notwendig ist. Andernfalls würde nämlich je nachdem, ob $v Q_a$ größer oder kleiner als Q_b ist, entweder μ_a oder μ_b einen positiven Realteil erhalten und damit eine angeschwellende Eigenschwingung entstehen. Diese Bedingung ist jedoch nicht hinreichend. Eine solche hängt von dem Verhältnis $v Q_a/Q_b$ ab. Stabilität ist nur bei Erfüllung der Ungleichung

$$\lambda_a \lambda_b < \begin{cases} 1 - v Q_a/Q_b & \text{für } v Q_a < Q_b \\ 1 - Q_b/v Q_a & \text{für } Q_b < v Q_a \end{cases} \quad (19)$$

vorhanden. Hieraus ergibt sich, daß es günstig ist, wenn der Quotient $v Q_a/Q_b$ möglichst stark von dem Wert eins abweicht, und zwar ist es zunächst gleichgültig, ob er dabei größer oder kleiner als eins bemessen wird. Wir werden später sehen, daß in bezug auf die Einschaltzeit erhebliche Unterschiede bestehen.

3. Stationäre Lösung

Wir betrachten jetzt den Fall, daß an den Eingangsklemmen des Primärkreises a eine stationäre Wechselspannung

$$u(t) = u_0 e^{i(x+\varphi)} \quad (20)$$

herrscht, deren Frequenz mit der Resonanzfrequenz ω_a nach Gl. (2) übereinstimmt. Dieser stationären Schwingung entsprechen stationäre Ladungsschwingungen in den Kreisen a und b ; wir bezeichnen sie mit $q_a^{(s)}$ und $q_b^{(s)}$. Im Kreis a überwiegt die Schwingung mit der Frequenz ω_a , während im Kreis b die Schwingung mit der Frequenz $\omega_b = -v \omega_a$ vorherrscht; alle anderen Schwingungen vernachlässigen wir, weil sie erheblich kleinere Amplituden haben. Diese Annahme entspricht dem Eigenschwingungszustand mit dem Eigenwert μ_{aI} nach Gl. (14), bei dem die Amplituden A_{0I} und B_{-1} auftreten. Daher gilt hier folgender Ansatz:

$$q_a^{(s)} = A e^{ix}, \quad q_b^{(s)} = B e^{-ivx} \quad (21)$$

(x normierte Zeit nach Gl. (7)). Als Ausgangspunkt zur Bestimmung der Amplituden A und B eignen sich wiederum die Differentialgleichungen in Gl. (4), von denen die obere jetzt auf der rechten Seite an Stelle von Null das Störungsglied nach Gl. (20) erhält. Führt man nun den Ansatz Gl. (21) in Gl. (4) mit dem Störungsglied ein, so erhält man zur Bestimmung von A und B zwei Gleichungen, die den Gl. (10a) und (11d) entsprechen. Sie lauten in normierter Form

$$\frac{i}{Q_a} A + \frac{v}{2} \kappa_a l B = \frac{u_0 e^{i\varphi}}{\omega_a^2 (L_a + L_0)}, \quad (22a)$$

$$-\frac{i}{Q_b} B + \frac{1}{2v} \kappa_b l A = 0. \quad (22b)$$

Setzt man die hieraus ermittelten Beziehungen für A und B in Gl. (21) ein, so hat man die stationäre Lösung in der Gestalt

$$q_a^{(s)}(t) = \frac{-i u_0 e^{i(\omega_a t + \varphi)}}{\omega_a R_a (1 - \lambda_a \lambda_b)}, \quad (23a)$$

$$q_b^{(s)}(t) = -\frac{\lambda_b u_0 e^{-i(\omega_b t - \varphi)}}{\omega_b R_a (1 - \lambda_a \lambda_b)} \quad (23b)$$

gewonnen. Man erkennt, daß man die Quotienten

$1/(1 - \lambda_a \lambda_b)$ als den Verstärkungsfaktor ansehen kann, der um so größer wird, je größer die Verstärkungsparameter λ_a und λ_b nach Gl. (17) sind. Formal würden die Amplituden A und B und damit der Verstärkungsfaktor sogar unendlich groß werden, wenn $\lambda_a \lambda_b = 1$ ist. Eine genauere Rechnung, bei der man in jedem Kreis auch die durch Schwingung des Nachbarkreises eingekoppelte Schwingung zu berücksichtigen hat, zeigt, daß die Amplituden A und B in diesem Sonderfall zwar sehr groß sind, aber endlich bleiben. Wir gehen auf diese genaueren Betrachtungen nicht ein, weil wir ohnehin von den Eigenschwingungen her wissen, daß die Anordnung für $\lambda_a \lambda_b = 1$ labil ist.

Der triviale Sonderfall, daß die Kopplungsreaktanz L_k konstant gleich L_0 ist ($l = 0$), ist ebenfalls in Gl. (23) enthalten. Nimmt man nämlich $\lambda_a = \lambda_b = 0$, so entsteht die Formel

$$q_{a0}^{(s)} = -\frac{i u_0 e^{i(\omega_a t + \varphi)}}{\omega_a R_a}, \quad q_{b0}^{(s)} = 0. \quad (24a, b)$$

Die Ladung $q_{b0}^{(s)}$ und der Strom $\dot{q}_{b0}^{(s)}$ im Blindkreis werden hier Null, weil wir die Kopplungen nach Gl. (5) als sehr klein vorausgesetzt haben.

4. Einschaltvorgang

Der Einschaltvorgang wird dadurch eingeleitet, daß zur Zeit $t = 0$ plötzlich die Wechselspannung $u(t)$ nach Gl. (20) an die Eingangsklemmen gemäß Bild 1 geschaltet wird. Dabei sei angenommen, daß die Fremdsteuerung der Kopplungsinduktivität L_k schon lange Zeit vorher bestanden hat, sie soll also zur Zeit $t = 0$ bereits stationär sein. Einen allgemeinen Ausdruck für den Ladungsverlauf erhält man, indem man die stationären Lösungen $q_a^{(s)}$ und $q_b^{(s)}$ nach Gl. (23) mit den Eigenschwingungen nach Gl. (18) überlagert. Wir schreiben also

$$q_a = q_a^{(e)} + q_a^{(s)}, \quad q_b = q_b^{(e)} + q_b^{(s)}. \quad (25)$$

Die vier in Gl. (18) vorkommenden Konstanten erhalten nun feste Werte durch die Anfangsbedingungen, nach denen sowohl die Ladungen q_a und q_b als auch die Ströme \dot{q}_a und \dot{q}_b im Einschaltmoment ($t = 0$) Null sein müssen. Es sind also die Beziehungen

$$(q_a)_{t=0} = 0, \quad (q_b)_{t=0} = 0, \quad (26a)$$

$$\left(\frac{dq_a}{dt} \right)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{dq_b}{dt} \right)_{t=0} = 0 \quad (26b)$$

zu erfüllen. Sie liefern ein System von vier Gleichungen, die zur Festlegung der vier Konstanten ausreichen. Wir geben die Konstanten nicht explizit an, sondern schreiben gleich die Formeln für den zeitlichen Verlauf der Ladungen in normierter Form an:

$$\begin{aligned} \frac{q_a(t)}{q_a^{(s)}(t)} &= 1 - e^{-t/T_a} + \\ &+ \frac{\frac{Q_b}{v Q_a} \lambda_a \lambda_b (e^{-t/T_b} - e^{-t/T_a})}{\left(\frac{Q_b}{v Q_a} - 1 \right) \left(\frac{v Q_a}{Q_b} - 1 \right) - \lambda_a \lambda_b}. \end{aligned} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} \frac{q_b(t)}{q_b^{(s)}(t)} &= 1 - e^{-t/T_b} + \\ &+ \frac{\left(\frac{v Q_a}{Q_b} + \lambda_a \lambda_b - 1 \right) (e^{-t/T_a} - e^{-t/T_b})}{\left(\frac{Q_b}{v Q_a} - 1 \right) \left(\frac{v Q_a}{Q_b} - 1 \right) - \lambda_a \lambda_b}. \end{aligned} \quad (27b)$$

Die Größen $q_a^{(s)}(t)$ und $q_b^{(s)}(t)$ bedeuten hierin die stationäre Lösung nach Gl. (23). Ferner sind T_a und T_b die Zeitkonstanten der beiden Kreise a und b ; sie berechnen sich zu

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{T_{a0}}{1 + \frac{\lambda_a \lambda_b}{(Q_b/v Q_a) - 1}}, \\ T_b &= \frac{T_{b0}}{1 + \frac{\lambda_a \lambda_b}{(v Q_a/Q_b) - 1}} \end{aligned} \quad (28)$$

und gehen für den Fall, daß die Koppelreaktanz nicht gesteuert wird ($\lambda_a = \lambda_b = 0$), in die bekannten Zeitkonstanten $T_{a0} = 2 L_a / R_a$ und $T_{b0} = 2 L_b / R_b$ für nicht gesteuerte Schwingungskreise über. Die Formeln (27) gelten unter der Annahme, daß die Periodendauern der Schwingungen klein im Vergleich zu den Zeitkonstanten sind; die Schwingungsamplituden sollen sich also nur sehr wenig von Periode zu Periode ändern ($\omega_a T_a \gg 1$; $\omega_b T_b \gg 1$).

Wie man erkennt, sind die Ladungen im Augenblick des Einschaltens ($t = 0$) gleich Null. Sie wachsen mit zunehmender Zeit und gehen für $t \rightarrow \infty$ in den stationären Schwingungszustand $q_a^{(s)}$ und $q_b^{(s)}$ nach Gl. (23) über. Dies gilt jedoch nur im Stabilitätsfall, d. h., solange beide Zeitkonstanten nach Gl. (28) positiv sind. Die Bedingungen hierfür sind in Gl. (19) formuliert. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, d. h., wird eine der beiden Zeitkonstanten negativ, so wachsen die Schwingungsamplituden mit der Zeit immer weiter bis ins Unendliche.

In den Bildern 3 bis 6 ist der zeitliche Verlauf des sogenannten Verstärkungsfaktors $V(t)$ in Abhängigkeit von der normierten Zeit t/T_{a0} dargestellt. Dabei ist $V(t)$ formal definiert durch

$$V(t) = \frac{q_a(t)}{q_a^{(s)}(t)} = \frac{q_a(t)}{q_a^{(s)}(t)} \frac{1}{1 - \lambda_a \lambda_b}. \quad (29)$$

Der Quotient $q_a/q_a^{(s)}$ ist Gl. (27a) zu entnehmen. Der Betrag $|V|$ des Verstärkungsfaktors $V(t)$ bedeutet physikalisch die Erhöhung der Schwingungsamplitude in dem primären Kreis a im Vergleich zu dem trivialen Fall ohne Fremdsteuerung der Kopplungsreaktanz ($\lambda_a \lambda_b = 0$). Ist die Schaltung stabil entsprechend dem Kriterium nach Gl. (19), so strebt $V(t)$ dem stationären Wert V_s zu:

$$V_s = \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \frac{1}{1 - \lambda_a \lambda_b}. \quad (30)$$

Die vier Kurvendarstellungen unterscheiden sich durch den Quotienten $v Q_a/Q_b$; in den Bildern 3 und 4 ist er größer als eins ($v Q_a/Q_b = 10$ und 2), während er in den Bildern 5 und 6 kleiner als eins

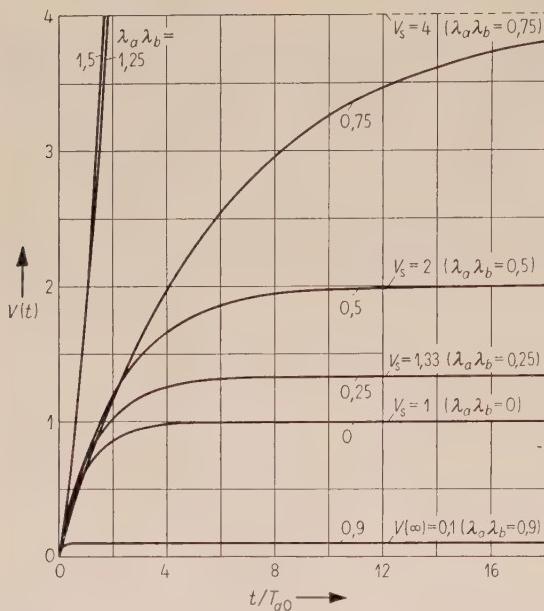


Bild 3. Der Anstieg des Verstärkungsfaktors V entsprechend Gl. (29) nach dem Einschalten zur Zeit $t = 0$ für $v Q_a/Q_b = 10$. $T_{a0} = 2L_a/R_a$ Zeitkonstante des Primärkreises a ohne Fremdsteuerung, λ_a, λ_b Verstärkungsparameter nach Gl. (17).

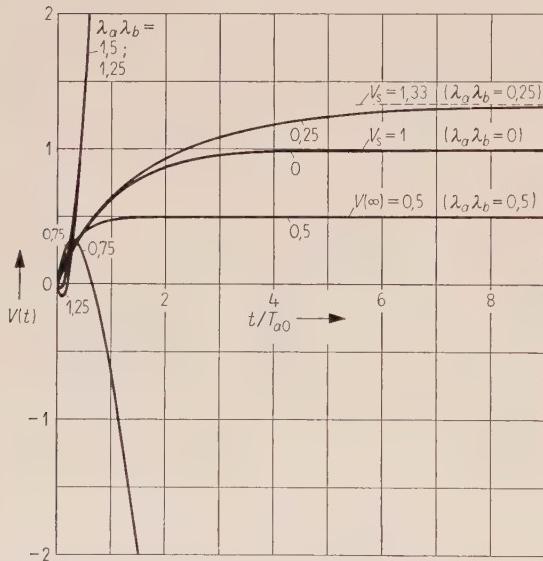


Bild 4. Der Anstieg des Verstärkungsfaktors V entsprechend Gl. (29) nach dem Einschalten zur Zeit $t = 0$ für $v Q_a/Q_b = 2$.

ist ($v Q_a/Q_b = 0,5$ und $0,1$). Als Parameter sämtlicher Kurvenscharen ist der Wert $\lambda_a \lambda_b$ gewählt worden. Man erkennt zunächst deutlich, daß alle Kurven ins Unendliche gehen, wenn das Stabilitätskriterium nach Gl. (19) verletzt ist. Dagegen streben sämtliche Werte V dem durch Gl. (30) erklärten stationären Endwert V_s zu, wenn der Verstärker stabil ist.

Während es vom Standpunkt des stationären Verstärkungsfaktors V_s nach Gl. (30) und des Stabilitätskriteriums entsprechend Gl. (19) gleichgültig ist,

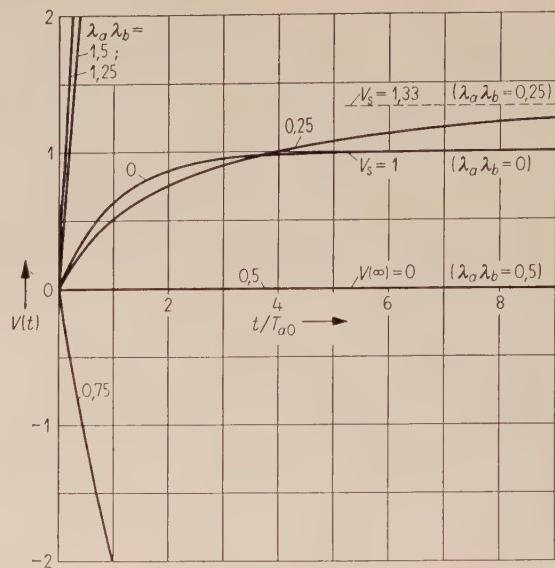


Bild 5. Der Anstieg des Verstärkungsfaktors V entsprechend Gl. (29) nach dem Einschalten zur Zeit $t = 0$ für $v Q_a/Q_b = 0,5$.

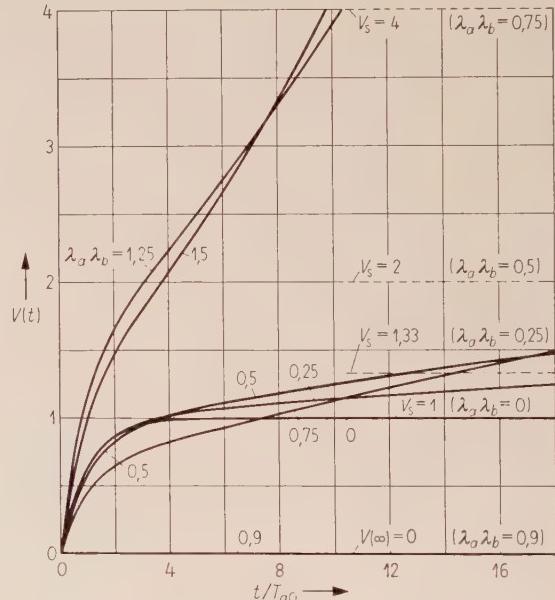


Bild 6. Der Anstieg des Verstärkungsfaktors V entsprechend Gl. (29) nach dem Einschalten zur Zeit $t = 0$ für $v Q_a/Q_b = 0,1$.

ob der Quotient $v Q_a/Q_b$ größer oder kleiner als eins ist, so bemerkt man jedoch einen erheblichen Unterschied zwischen diesen beiden Fällen hinsichtlich der Einschwingdauer. Dies wird besonders deutlich durch Vergleich des Bildes 3 ($v Q_a/Q_b = 10$) mit Bild 6 ($v Q_a/Q_b = 0,1$). Man erkennt leicht, daß die Einschwingdauer im letzten Fall ganz erheblich länger ist, obgleich die stationären Endwerte V_s gleich groß sind ($\lambda_a \lambda_b < 0,9$ vorausgesetzt). Die physikalische Ursache hierfür ist, daß im Fall $v Q_a/Q_b = T_{a0}/T_{b0} < 1$ die im Blindkreis b schwin-

genden Energiebeträge der Reaktanzen größer sind als im Primärkreis a . Daher ist auch eine längere Zeit erforderlich, um diese Energie aufzubauen.

Dies läßt sich auch formelmäßig ausdrücken. Bezeichnet man als Einschwingdauer (t_ε) diejenige Zeit nach dem Einschalten, in der der Wert εV_s erreicht ist ($\varepsilon < 1$), dann ist bei einem gewöhnlichen Schwingungskreis ($\lambda_a \lambda_b = 0$)

$$t_{\varepsilon 0} = T_{a0} \ln \frac{1}{1 - \varepsilon}. \quad (31)$$

Ist dagegen $\lambda_a \lambda_b > 0$, so gewinnt man eine entsprechende Formel aus Gl. (27a); dabei ist zwischen dem Fall $v Q_a/Q_b > 1$ und $v Q_a/Q_b < 1$ zu unterscheiden. Im ersten Fall wie in den Bildern 3 und 4 ist der Bruch in Gl. (27a) vernachlässigbar im Vergleich zu den ersten beiden Termen. Dementsprechend lautet die Formel für die Einschwingdauer im stabilen Bereich

$$t_\varepsilon = \frac{T_{a0}}{\lambda_a \lambda_b} \ln \frac{1}{1 - \varepsilon} \quad \text{für } v Q_a > Q_b \text{ oder } T_{a0} > T_{b0}. \quad (32)$$

$$1 - \frac{1}{1 - Q_b/v Q_a}$$

Nach dem Stabilitätskriterium (19) ist der Quotient im Nenner kleiner als eins. Das Einschwingen dauert also im Vergleich zu dem trivialen Fall (Gl. (31)) um so länger, je größer das Produkt der Verstärkungsparameter ($\lambda_a \lambda_b$) ist. — Nehmen wir jetzt an, daß $v Q_a/Q_b < 1$ ist wie in den Bildern 5 und 6. Es läßt sich zeigen, daß in diesem Fall der Term mit e^{-t/T_b} alle anderen Exponentialfunktionen überwiegt. Damit gewinnt man für die Einschwingdauer die Näherungsformel

$$t_\varepsilon \approx \frac{Q_b T_{a0}}{v Q_a \left(1 - \frac{\lambda_a \lambda_b}{1 - v Q_a/Q_b}\right)} \ln \frac{1}{1 - \varepsilon} \quad (33)$$

$$\text{für } v Q_a < Q_b \text{ oder } T_{a0} < T_{b0},$$

die um so genauer ist, je näher ε an eins liegt. Ein Vergleich mit Gl. (32) lehrt, daß hier der Faktor $Q_b/v Q_a$ hinzukommt, der nach Voraussetzung größer ist als eins.

Beispiel:

Nimmt man $\lambda_a \lambda_b = 0,75$, so beträgt der Verstärkungsfaktor 4, während der Verstärker für $v Q_a/Q_b = 10$ und auch für 0,1 stabil ist. Im ersten Fall ist nach Gl. (32) die Einschwingdauer sechsmal länger ($t_\varepsilon = 6 t_{\varepsilon 0}$) als die des gewöhnlichen Schwingungskreises ($\lambda_a \lambda_b = 0$). Ist dagegen $v Q_a/Q_b = 0,1$, so ergibt sich nach Gl. (33) ein Verhältnis von 60 ($t_\varepsilon = 60 t_{\varepsilon 0}$). Der Verstärker braucht also zum Einschwingen im zweiten Fall eine zehnmal so lange Zeit wie im ersten Fall. Die Bilder 3 und 6 veranschaulichen dieses Ergebnis.

Von Interesse dürfte noch der Grenzfall sein, bei dem der Stabilitätsbereich in den instabilen Bereich übergeht:

$$\lambda_a \lambda_b = \begin{cases} 1 - Q_b/v Q_a & \text{für } v Q_a > Q_b (T_{a0} > T_{b0}), \\ 1 - v Q_a/Q_b & \text{für } Q_b > v Q_a (T_{b0} > T_{a0}). \end{cases}$$

Hierfür werden die Einschwingzeiten t_ε nach Gl. (32) und (33) unendlich, weil der Nenner verschwindet. Die Bilder 3 bis 6 zeigen, daß dies tatsächlich eintritt, denn die stationären Verstärkungsfaktoren V_s werden hierfür auch nach unendlich langer Zeit nicht erreicht. Der Verstärkungsfaktor $V(t)$ nimmt nämlich sehr schnell einen konstanten Wert an, der erheblich unter V_s liegt. Dieser Wert ist

$$V(\infty) = \begin{cases} Q_b/v Q_a & \text{für } v Q_a > Q_b, \\ 0 & \text{für } Q_b > v Q_a. \end{cases} \quad (35)$$

Wird nun $\lambda_a \lambda_b$ größer als der Grenzwert nach Gl. (34), so gehen die Verstärkungsfaktoren ins Unendliche, und zwar sind sie zunächst negativ, wie aus den Bildern 4 und 5 hervorgeht. Erst wenn $\lambda_a \lambda_b$ den Wert eins überschreitet ($\lambda_a \lambda_b > 1$), werden die Werte wieder positiv, was auch aus den Kurven zu ersehen ist.

Schrifttum

- [1] STEVENS, W. H., Circuit analogues of Suhl-type masers. J. Electronics and Control (1) 4 [1958], 275–279.
- [2] VALDES, L. B., Circuit conditions for parametric amplification. J. Electronics and Control (1) 5 [1958], 129–141.
- [3] KADEN, H., Das Einschalten eines Schwingungskreises mit einer gesteuerten Reaktanz. A.E.U. 15 [1961], 313–318.

Möglichkeiten zur Realisierung logischer (Boolescher) Funktionen mit rechteckmagnetischen Netzen

von UDO HÖLKEN

Mitteilung aus dem Institut für elektrische Nachrichtentechnik und Meßtechnik
der Technischen Hochschule München

(A. E. U. 15 [1961], 482–494; eingegangen am 3. Juni 1961)

DK 621.318.1:681.14 - 523.8

Alle Methoden zur Realisierung logischer Operationen mit Transfluxoren lassen sich bezüglich der Eingangs- und Ausgangssignale in zwei Klassen teilen: Die eine Klasse gestattet eine direkte Verwendung der Ausgangssignale als Eingangssignale, die andere nicht. Die erstere ist zum Aufbau größerer logischer Netze geeignet, die nichts weiter enthalten als Transfluxoren mit ihren Wicklungen. Diese Klasse wird hier untersucht.

Zunächst wird eine bekannte Methode der Ausgabe erklärt, bei der jeder Ausgang als Zweipol beschrieben wird. Durch Zusammenschaltung von Ausgängen zu einem „Ausgangszweipol“ lassen sich Boolesche Funktionen realisieren.

Nach Beschreibung einer einfachen Methode der Eingabe wird gezeigt, daß die Zusammenschaltung von Ausgangszweipol und Eingang möglich ist. Die Boolesche Funktion (oder ihre Negation), welche der Ausgangszweipol repräsentiert, wird dabei in den Eingang geschrieben.

Verwendet man in einem Transfluxor mehrere Eingänge, so ist es möglich, in diesen eine Boolesche Funktion der einzelnen Eingangsgrößen einzuschreiben. Dazu ist es allerdings nötig, daß die Eingänge irgendwie miteinander gekoppelt sind.

Bei Verwendung von Eingängen, die unabhängig voneinander arbeiten, kann zunächst nur in jedem eine Eingangsgröße eingeschrieben werden, ohne daß dabei schon eine logische Verarbeitung erfolgt. Man kann aber die eingeschriebenen Größen durch Ummagnetisierungen im Transfluxor zusammenführen und dadurch Boolesche Funktionen realisieren, die dann an einem oder mehreren Ausgängen abgefragt werden können. Damit sind drei verschiedene Realisierungsmethoden gefunden:

1. Durch Zusammenschaltung von Ausgängen, kurz „Ausgangslogik“.
2. Durch gekoppelte Eingänge, kurz „Eingangslogik“.
3. Durch geeignete Ummagnetisierungen im Inneren des Transfluxors, kurz „innere Logik“.

Ziel dieser Arbeit ist, die drei genannten Realisierungsmethoden herauszustellen. Daher wurden alle Schwierigkeiten, die aus den begrenzten Herstellungsmöglichkeiten und den Vorgängen bei der Ummagnetisierung resultieren, durch geeignete Idealisierungen eliminiert. Andererseits werden aber auch in weiten Grenzen beliebige Strukturen zugelassen. Für den einerseits idealisierten und andererseits verallgemeinerten Transfluxor wird der Name „rechteckmagnetisches Netz“ vorgeschlagen. Eine geeignete Beschreibungsmethode für solche Netze wird angegeben.

With respect to the input and output signals all methods for the realization of logic operations with transfluxors can be divided into two classes: One class allows, the other disallows, a direct use of the output signals as input signals. The first class is suitable for establishing larger logical networks which contain merely transfluxors and their windings. This class is here subjected to analysis.

Initially a well-known method of signal output is explained where each output is described as a two-terminal network. By interconnecting outputs to a “two-terminal output network” Boole functions can be realized.

After describing a simple method of signal input it is shown that an interconnection of two-terminal output network and input is possible. The Boole function (or its negation) which is represented by the two-terminal output network is read into the input in this application.

If a number of inputs are used in a transfluxor, it is possible to read into it a Boole function of the individual input variables. For this purpose it is indeed necessary that the inputs are intercoupled in some way.

With the use of inputs that operate independently of each other it is initially merely possible to read into each of these an input variable without logical processing at this stage. It is possible, however, to bring together the read-in quantities by remagnetizations in the transfluxor and realize Boole functions in this way that can then be read out at one or several outputs. Three different methods of realization are so found:

- (1) By interconnection of outputs, or “output logic” for short
- (2) By coupled inputs, or “input logic” for short
- (3) By suitable remagnetization inside the transfluxor, or “internal logic” for short.

The objective of this paper is an outline of the three aforementioned methods of realization. All difficulties resulting from the limited manufacturing possibilities and the processes with the remagnetization were eliminated by suitable idealizations. On the other hand, configurations are admitted that are arbitrary within wide limits. For the transfluxor which is idealized on the one hand generalized on the other, the term “rechteckmagnetisches Netz” (rectangular-magnetic network) is proposed. A suitable description method for such networks is stated.

1. Vorbemerkungen

Die Boolesche Algebra benutzt als Elemente die „Booleschen Größen“, welche nur jeweils einen von zwei Werten annehmen können. Diese Werte lassen sich etwa als „0“ und „1“ kennzeichnen.

Mit den Elementen können drei verschiedene „Boolesche Operationen“ ausgeführt werden:

1. Die Negation:

$$a = \bar{e} \quad (1)$$

Der Querstrich über dem e bedeutet, daß a für $e = 0$ den Wert 1 annimmt und umgekehrt für $e = 1$ den Wert $a = 0$.

2. Die Konjunktion:

$$a = e_1 e_2 e_3 \dots e_n \equiv \prod_{i=1}^n e_i, \quad (n \geq 2). \quad (2)$$

a hat nur dann den Wert 1, wenn alle $e_i = 1$ sind.

3. Die Disjunktion:

$$a = e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_n \equiv \sum_{i=1}^n e_i, \quad (n \geq 2). \quad (3)$$

a hat nur dann den Wert 0, wenn alle $e_i = 0$ sind.

Durch Anwendung der drei Operationen auf einen Satz von Variablen e_i entsteht die „Boolesche Funktion“, deren allgemeine Form als

$$a = f(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n) \quad (4)$$

geschrieben wird.

Zur Realisierung solcher Funktionen benötigt man eine geeignete Schaltung mit n Eingängen $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$, denen die „Eingangsgrößen“ e_i aus Gl. (4) übermittelt werden. Weiterhin besitzt die Schaltung einen Ausgang A, der die „Ausgangsgröße“ a gemäß Gl. (4) liefert.

Die Eingänge E_i erhalten Eingangssignale, und es muß verabredet werden, welche Eingangssignale als Eingangsgröße 0 und welche als Eingangsgröße 1 gedeutet werden sollen. Ist beispielsweise das Eingangssignal eine Spannung, so könnte der Bereich zwischen 0V und 3V als 0 gedeutet werden, der Bereich zwischen 6V und 9V als 1. Eingangssignale außerhalb dieser Bereiche treten nicht auf, so daß tatsächlich jedes Signal eindeutig als 0 oder 1 unterschieden werden kann.

Entsprechend ist die Schaltung so aufzubauen, daß die Ausgangssignale stets in einem von zwei unterscheidbaren Bereichen liegen und damit ebenfalls als $a = 0$ oder $a = 1$ gedeutet werden können.

Wesentlich ist, daß die Ausgangsgröße a für jede Wertekombination der e_i den durch Gl. (4) festgelegten Wert annimmt. Man sagt dann: Die Schaltung realisiert die Boolesche Funktion (4).

Die Realisierung einer Booleschen Funktion ist ein technisches Syntheseproblem:

Ausgehend von der vorgegebenen Funktion ist eine geeignete Schaltung zu suchen, welche diese realisiert. Je nachdem, welche Bauelemente man zur Lösung der Aufgabe benutzt, werden teilweise wesentlich verschiedene Schaltungen resultieren. Auch bei vorgegebenen Elementen ist die Lösung nicht eindeutig.

In dieser Arbeit wird zur Realisierung ausschließlich der Transfluxor [1] benutzt. Es wird sogar verlangt, daß Teilschaltungen, die gewisse Funktionen realisieren, zu größeren Schaltungen zusammengefügt werden können, d. h., Ausgangssignale eines Transfluxors müssen stets als Eingangssignale für andere Transfluxoren verwendbar sein. Auf diese Weise sind im Prinzip beliebig große Schaltungen unter ausschließlicher Verwendung von Transfluxoren möglich.

Die Fragestellung dieser Arbeit „Wie lassen sich Boolesche Funktionen mit Transfluxoren realisieren?“ ist schon in den Arbeiten [2] bis [7] zum Teil beantwortet, aber nicht unter Berücksichtigung der Forderung, daß Ausgangssignale direkt auch als Eingangssignale verwendbar sind. Diese Forderung wird bei CRANE [8] und PRYWES [9] erfüllt. Beide Autoren geben jedoch nur einfache experimentell untersuchte Beispiele, während hier mehr Wert auf eine umfassendere Darstellung der Realisierungsmöglichkeiten gelegt wird, ohne Eingehen auf praktische Probleme. Entsprechend werden letztere durch weitgehende Idealisierung des Transfluxors eliminiert.

2. Beschreibung rechteckmagnetischer Netze

Die oben erwähnte Idealisierung des Transfluxors wird im folgenden Abschnitt 2.1 näher erklärt. Für dieses idealisierte Element wurde in [10] die Bezeichnung „rechteckmagnetisches Netz“ vorgeschlagen, welche auch im folgenden benutzt wird.

2.1. Definition des rechteckmagnetischen Netzes

Das rechteckmagnetische Netz besteht aus Zweigen und Knoten. Die Zweige werden wie folgt definiert:

- Jeder Zweig besitzt zwei nicht identische Enden P_i und P_k , zwischen denen eindeutig ein Integral $\int_{P_i}^{P_k} \mathbf{H} ds = \Theta$ der magnetischen Feldstärke \mathbf{H} gemessen werden kann. Θ heißt „Zweigerregung“.
- Jeder Zweig besitzt in seinem Inneren einen magnetischen Fluß Φ , der nur an seinen Enden ein- bzw. austritt.
- Der Zusammenhang zwischen Φ und Θ wird durch die Schleife aus Bild 1 vermittelt. Φ_0 ist gleich für alle Zweige, und in stationären Zuständen ist in jedem Zweig der Fluß $+\Phi_0$ oder $-\Phi_0$.

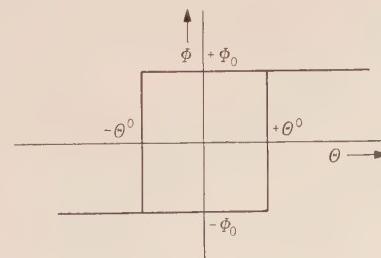


Bild 1. Rechteckige Magnetisierungsschleife.

Die Enden der Zweige heißen Knoten. Aus den Knoten tritt der Fluß Φ nur in die angrenzenden Zweige aus bzw. ein.

Das rechteckmagnetische Netz soll aus den Zweigen so zusammengefügt sein, daß es zusammenhängend ist, auch noch nach Ausschneiden irgend eines Knotens mit seinen angrenzenden Zweigen.

Damit ist das rechteckmagnetische Netz definiert. Man sieht leicht, daß es nichts anderes ist als ein idealisierter Transfluxor: Definition a) wird von Transfluxoren näherungsweise erfüllt, wenn ihre Zweige hinreichend schlank sind und nicht identische Enden haben. Definition b) ist wegen der hohen Permeabilität des Materials mit guter Näherung erfüllt. Definition c) idealisiert die Hysteresisschleife $B(H)$ des Materials zur Rechteckigkeit, woraus bei ideal schlanken Zweigen auch die Rechteckigkeit von $\Phi(\Theta)$ folgt.

Die „Schwellerregung“ Θ^0 aus Bild 1 errechnet sich aus der Schwellfeldstärke H_0 der rechteckigen Hysteresisschleife zu

$$\Theta^0 = H_0 l \quad (5)$$

mit l als Länge des Zweiges.

Die Gleichheit von Θ^0 für alle Zweige erreicht man durch gleiche Zweigquerschnitte.

Schließlich werden durch Definition c) auch alle Trägheiten der Ummagnetisierung vernachlässigt.

Die Struktur eines rechteckmagnetischen Netzes kann durch einen Streckenkomplex beschrieben werden, dessen Strecken und Knoten die Zweige und Knoten des Netzes darstellen. Da nach Definition c) die Zweige nur in einem von zwei möglichen Magnetisierungszuständen stationär existieren können, lassen sich diese durch Richtungspfeile in den Strecken des Komplexes eindeutig kennzeichnen. Es wird verabredet, daß die Pfeile gleiche Richtung haben wie der Zweigfluß Φ .

Der gerichtete Streckenkomplex beschreibt demnach Struktur und stationären Magnetisierungszustand des rechteckmagnetischen Netzes. Im folgenden werden die Netze stets in der verabredeten Weise als gerichtete Streckenkomplexe gezeichnet (siehe dazu die Bilder 4 und 7 bis 12).

Die Eigenschaften dieser Streckenkomplexe werden hier nicht weiter untersucht, näheres ist in [10] zu finden.

2.2. Die Beschreibung durch Längen

Nachdem die Beschreibung des stationären Magnetisierungszustandes durch gerichtete Streckenkomplexe möglich ist, ist nun die Frage zu beantworten, wie Zustandsänderungen bewirkt werden.

Ummagnetisierungen sind nur dadurch zu erreichen, daß um Zweige des Netzes Wicklungen gelegt werden, denen man von außen geeignete Ströme mitteilt. Der Einfachheit halber sei zunächst nur eine Wicklung W_1 mit w_1 Windungen um einen Zweig z_1 betrachtet. Der Wicklungsstrom I_1 muß eine solche Richtung haben, daß z_1 ummagnetisiert werden kann; dies sei vorausgesetzt.

Der Zweig z_1 kann nicht allein ummagnetisieren, sondern nur mit einem Satz anderer Zweige, welche

zusammen einen geschlossenen Weg bilden, in dem sich die Magnetisierungspfeile nachlaufen (siehe [10]). Ein solcher Satz heißt „ummagnetisierbarer Ring“. Für den Ring gilt

$$I_1 w_1 = \oint \mathbf{H} ds. \quad (6)$$

Nach Definition a) aus Abschnitt 2.1 läßt sich das Integral in Teilintegrale, die Zweigerregungen, spalten.

$I_1 w_1$ wird als Θ_{a1} , die „äußere Erregung“ des Zweiges z_1 , abgekürzt. Somit wird, wenn der betrachtete Ring die Zweige $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ enthält aus Gl. (6)

$$\Theta_{a1} = \sum_{i=1}^n \Theta_i. \quad (7)$$

Die notwendige Erregung Θ_{a1}^0 zur Ummagnetisierung des Ringes ergibt sich, wenn man für alle Θ_i die Werte Θ_i^0 aus Bild 1 einsetzt, also

$$\Theta_{a1}^0 = \sum_{i=1}^n \Theta_i^0, \quad (8)$$

$$\text{oder mit Gl. (5)} \quad \Theta_{a1}^0 = H_0 \sum_{i=1}^n l_i. \quad (9)$$

Setzt man $\sum_{i=1}^n l_i = L$ mit L als Gesamtlänge des

Ringes, so wird

$$\Theta_{a1}^0 = H_0 L. \quad (10)$$

Die Länge eines Zweiges z_i wird mit Gl. (5) als Quotient der Schwellerregung Θ_i^0 mit der Schwellfeldstärke H_0 definiert. Ebenso kann man eine „äußere Länge“ l_{ai} des Zweiges z_i durch

$$\Theta_{ai} = H_0 l_{ai} \quad (11)$$

definieren, entsprechend auch eine Länge l_{ai}^0 , welche zur Ummagnetisierung nötig ist. Damit wird aus Gl. (10)

$$l_{ai}^0 = L. \quad (12)$$

Allgemein wird man voraussetzen, daß alle Zweige des betrachteten Ringes Wicklungen W_i tragen, denen jeweils äußere Erregungen Θ_{ai} mitgeteilt werden. Nunmehr können auch einige Θ_{ai} der Ummagnetisierung des Zweiges z_i entgegenwirken; man rechnet sie dann negativ. Anstatt Gl. (7) gilt jetzt

$$\sum_{i=1}^n \Theta_{ai} = \sum_{i=1}^n \Theta_i \quad (13)$$

$$\text{oder} \quad \sum_{i=1}^n (\Theta_i - \Theta_{ai}) = 0. \quad (14)$$

Durch Division mit H_0 erhält man bei Beachtung der Gl. (5) und (11)

$$\sum_{i=1}^n (l_i - l_{ai}) = \sum_{i=1}^n \left(l_i - \frac{\Theta_i}{H_0} \right). \quad (15)$$

Die Größe

$$l_i - l_{ai} = l'_i \quad (16)$$

wird als „scheinbare Länge“ des Zweiges z_i bezeichnet, entsprechend

$$\sum_{i=1}^n l'_i = L' \quad (17)$$

als scheinbare Länge des Ringes. Gl. (15) läßt sich dann auch in der Form

$$L' = \sum_{i=1}^n \left(l_i - \frac{\Theta_i}{H_0} \right) \quad (18)$$

schreiben.

Wenn der betrachtete Ring ummagnetisiert, sind alle $\Theta_i = \Theta_i^0$. Mit Gl. (5) verschwindet dann jeder Summand der rechten Seite von Gl. (18) einzeln, und L' wird Null. Ist aber für wenigstens einen Zweig $\Theta_i < \Theta_i^0$, so kann dieser Zweig nicht ummagnetisieren, also auch nicht die anderen Zweige des Ringes, für die somit auch $\Theta_k < \Theta_k^0$ ist. Die rechte Seite von Gl. (18) wird damit bei Beachtung von Gl. (5) positiv.

Man erhält also: Ein ummagnetisierbarer Ring der scheinbaren Länge L' magnetisiert bei $L' = 0$ um, nicht aber bei $L' > 0$. Der Fall $L' < 0$ ist nicht denkbar, weil mit Gl. (18) dann wenigstens eine Zweigerregung $\Theta_i > \Theta_i^0$ sein müßte, was nach Bild 1 während der Ummagnetisierung ausgeschlossen ist. Damit ist die Frage, welche Zweige bei gegebenen äußeren Erregungen ummagnetisieren, so zu beantworten:

1. Die äußeren Erregungen sind nur soweit frei wählbar, als kein ummagnetisierbarer Ring mit $L' < 0$ auftritt.
2. Alle ummagnetisierbaren Ringe mit $L' = 0$, und nur diese, magnetisieren um.

Man beachte:

- a) Scheinbare Ringlängen L' sind nur für ummagnetisierbare Ringe definiert. Es ist stets $L' \geq 0$.
- b) Scheinbare Zweiglängen l' sind nur mit Angabe des momentanen Magnetisierungszustandes der jeweiligen Zweige bestimmt, weil eine äußere Erregung in einem Magnetisierungszustand die Ummagnetisierung hemmt, also verlängernd wirkt; im entgegengesetzten Magnetisierungszustand wirkt dieselbe äußere Erregung aber verkürzend, sie erleichtert die Ummagnetisierung. l' kann auch negativ sein.

3. Ausgänge und ihre Zusammenschaltung

3.1. Abfragen der Ausgangsgröße, Beschreibung des Ausganges durch seine Länge

Da nach Abschnitt 1 eine Zusammenschaltung von Ausgängen mit Eingängen direkt möglich sein soll, muß die Energie des Ausgangssignales mindestens so groß sein wie die für ein Eingangssignal notwendige. Man braucht also eine Energieverstärkung ≥ 1 . Daraus folgt, daß ein Ausgangssignal nicht gleichzeitig mit dem Eingangssignal abgegeben werden kann, weil das rechteckmagnetische Netz in solchem Betrieb ein passives Element ist. Man muß vielmehr notwendig mit zwei Zeitintervallen τ_1 und τ_2 arbeiten, so daß in τ_1 die Eingangssignale eingespeichert werden und zu einer späteren Zeit τ_2 das Ausgangssignal abgefragt wird. Nur so ist eine Energieverstärkung > 1 möglich. Die Speichereigenschaft des rechteckmagnetischen Netzes ist demnach notwendig.

Die Ausgangsinformation ist als Magnetisierungszustand gespeichert. Sie muß so abgefragt werden, daß eine Ummagnetisierung bewirkt oder versucht wird. Wie man auch abfragt, man muß stets mit einer Ummagnetisierung rechnen, und diese muß notwendig rückgängig gemacht werden, damit mehrmals hintereinander abgefragt werden kann. Das Intervall τ_2 spaltet demnach auf in die Intervalle oder „Taktzeiten“ T_3 zum „Abfragen“ und T_4 zum „Rückstellen“.

Wenn Ausgangssignale direkt als Eingangssignale verwendbar sein sollen, muß entsprechend auch das Intervall τ_1 für die Eingabe in T_1 und T_2 aufgespalten. Es ist klar, daß T_3 und T_4 , damit auch T_1 und T_2 , sich nicht überdecken dürfen, wie oben erwähnt, auch nicht T_1 und T_3 . Eine Überdeckung von T_2 und T_3 ist allerdings möglich, führt aber stets zu Komplikationen und soll daher hier nicht näher betrachtet werden.

Es ist nun zu klären, wie die Ausgangsinformation im rechteckmagnetischen Netz gespeichert und abgefragt wird. Dies geschieht durch folgende Festlegung:

- a) Es existiert ein „Ausgangsring“, welcher in bestimmter Richtung ummagnetisierbar ist, wenn die Ausgangsgröße 1 ist, und der nicht in dieser Richtung ummagnetisierbar ist, wenn die Ausgangsgröße 0 ist.
- b) Um einen Zweig des Ausgangsrings, den „Ausgangszweig“, wird eine „Ausgangswicklung“ aus widerstandslosem Draht gelegt. Dieser wird mit T_3 ein geeigneter „Fragestrom“ mitgeteilt, der bei Abfragen einer 1 den Ausgangsring ummagnetisiert, während er bei Abfragen einer 0 wirkungslos bleibt. Das Ausgangssignal stellt sich bei Abfragen einer 1 als

$$\int U dt = 2\Phi_0 w \quad (19)$$

an der Ausgangswicklung dar (w ist die Windungszahl). Bei Abfragen der 0 erhält man keine Spannung an der Wicklung.

- c) Mit T_4 legt man an die Ausgangswicklung einen „Rückstellstrom“, der nach Abfragen der 1 den Ausgangsring zurückmagnetisiert und nach Abfragen der 0 wirkungslos bleibt.

Andere Methoden des Abfragens sind denkbar, diese scheint die einfachste zu sein und wird daher als einzige benutzt.

Die Ausgangsgröße steht vor dem Abfragen im Ausgangsring und wurde auf geeignete Weise von den Eingängen her dorthin gebracht. Dabei wurde aber der Ausgangszweig nicht ummagnetisiert, er enthält also die Ausgangsinformation nicht. Beim Abfragen wird daher stets seine Ummagnetisierung versucht.

Bild 12 zeigt einen Ausgangsring mit fünf Zweigen, z_5 ist der Ausgangszweig. Dieser Ring speichert in Bild 12a die Ausgangsgröße 0, in Bild 12b die Ausgangsgröße 1. Ersichtlich ist nur die Ausgangsgröße 1 durch genau einen Magnetisierungszustand gekennzeichnet, nicht aber die 0, für die Bild 12a nur eine von mehreren Möglichkeiten zeigt.

Die notwendige Frageerregung zur Ummagnetisierung des Ausgangsrings wird durch dessen Länge L_a^1 bestimmt. Ist der Ausgangsring nicht ummagnetisierbar, so gibt es nach [10] noch wenigstens zwei andere ummagnetisierbare Ringe, welche den Ausgangszweig enthalten. Nach obiger Festlegung b) darf keiner dieser Ringe durch die Frageerregung ummagnetisiert werden. Hat der kürzeste dieser Ringe die Länge L_a^0 , so muß die äußere Erregung beim Abfragen eine Länge kleiner als L_a^0 haben.

Weil die äußere Erregung meist direkt einer Quelle entnommen wird, heißt sie auch „Quellenerreger“, und ihre Länge wird als L_q bezeichnet. Nach dem bisher gesagten gilt für die Länge L_q der Fragequelle

$$L_a^1 \leq L_q < L_a^0. \quad (20)$$

L_q muß innerhalb des „Ausgangsintervalles“

$$\Delta L_a = L_a^0 - L_a^1 \quad (21)$$

liegen. Genau genommen hat L_q nur bei Abfragen einer 0 diese Freiheit, bei Ummagnetisieren des Ausgangsrings ist ohnehin $L_q = L_a^1$ (siehe dazu Abschnitt 2.2).

Allgemein bezeichnet man als „Ausgangslänge“ L_a die Länge des Ringes, der bei hinreichender Frageerregung ummagnetisieren kann. L_a wird durch den momentanen Magnetisierungszustand bestimmt. $L_a = L_a^1$ ist die kürzeste Ausgangslänge $L_a = L_a^0$ nach Definition die zweitkürzeste.

Für den Rückstellstrom muß eine Quelle mit $L_q \geq L_a^1$ benutzt werden, die nach Abfragen einer 1 den Ausgangsring zurückmagnetisieren muß. Eine obere Begrenzung für L_q ist nicht nötig. Aus diesem Grunde entstehen auch beim Rückstellen keine Schwierigkeiten.

Im folgenden werden nur noch die beim Abfragen auftretenden Probleme untersucht.

Die Eigenschaften des Ausgangs sind durch die Ausgangslänge L_a vollständig beschrieben, ebenfalls die im Ausgangsring gespeicherte Ausgangsgröße a mit

$$a = 1 \quad \text{bei } L_a = L_a^1 \quad (22)$$

$$\text{und} \quad a = 0 \quad \text{bei } L_a \geq L_a^0. \quad (23)$$

3.2. Zusammenschaltung von Ausgängen

Der einzelne Ausgang ist ein Zweipol, welcher durch seine Länge L_a vollständig beschrieben ist. Schaltet man nun mehrere Ausgänge zu einem „Ausgangszweipol“ zusammen, so sollte auch dieser durch eine „Zweipollänge“ L_z vollständig zu beschreiben sein. Diese Länge L_z wäre durch den Strom I bestimmt, welchen man zu irgendeiner Ummagnetisierung durch den Zweipol schicken muß. In Anlehnung an Gl. (5) und die bisherigen Längendefinitionen ist

$$Iw = H_0 L_z \quad (24)$$

zu schreiben. Dabei ist w die allen im Zweipol enthaltenen Ausgängen gemeinsame Windungszahl. Diese Gleichheit aller Windungszahlen erscheint

zunächst als willkürlich; in Wirklichkeit ist sie aber notwendig, weil Zweige, wenn überhaupt, dann vollständig mit $2\Phi_0$ ummagnetisieren müssen und sämtliche Wicklungswiderstände als 0 angenommen sind.

Die Zweipollänge L_z ist verschiedener Werte fähig, abhängig von der Länge der einzelnen Ausgänge. Es gibt jedoch einen Satz von Werten für L_z , der nur Ummagnetisierungen solcher Ausgänge entspricht, die eine 1 enthalten, deren Längen L_{ai} , also sämtlich L_{ai}^1 sind. Von diesem wird die größte Länge mit L_z^1 bezeichnet. Von allen anderen Werten L_z , die nicht zu diesem Satz gehören, wird der kleinste mit L_z^0 bezeichnet, und

$$\Delta L_z = L_z^0 - L_z^1 \quad (25)$$

ist das „Zweipolintervall“.

Das Zweipolintervall hat die entsprechende Bedeutung wie das Ausgangsintervall: Wenn die Länge L_q der Fragequelle in diesem Intervall liegt, können nur solche Ausgangszweige ummagnetisiert werden, deren Ausgangsringe eine 1 enthalten. Ersichtlich sind Zusammenschaltungen von Ausgängen nur dann sinnvoll, wenn $\Delta L_z > 0$ ist, andernfalls kann der Zweipol nicht abgefragt werden.

Entsprechend der Ausgangsgröße a beim einzelnen Ausgang wird für den Zweipol eine „Zweipolfunktion“ z definiert mit

$$z = 1 \quad \text{für } L_z \leq L_z^1 \quad (26)$$

$$\text{und} \quad z = 0 \quad \text{für } L_z \geq L_z^0. \quad (27)$$

Die Aufgabe der Analyse eines vorgegebenen Ausgangszweipoles mit den Ausgängen $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ besteht darin, die Zweipollänge L_z , insbesondere die Werte L_z^0 und L_z^1 , durch die Ausgangslängen L_{ai} der Ausgänge A_i auszudrücken. Damit ist auch die Boolesche Funktion $z(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ leicht angebar.

Wie schon erwähnt, ist die Zweipolfunktion z wie eine Ausgangsgröße abfragbar. Durch das Abfragen kann die Boolesche Funktion z als realisiert angesehen werden. Die geeignete Zusammenschaltung von Ausgängen zu Ausgangszweipolen ist daher eine Methode zur Realisierung Boolescher Funktionen. Man kann, wie im Abschnitt 4 gezeigt wird, die Zweipolfunktion z wieder in den Eingang eines neuen rechteckmagnetischen Netzes einschreiben. Dessen Ausgang kann wiederum mit anderen Ausgängen zu einem neuen Zweipol zusammengeschaltet werden usw.

Die Realisierungsmethode durch Ausgangszweipole wird abkürzend als „Ausgangslogik“ bezeichnet. Beispiele zur Ausgangslogik bringen die Abschnitte 3.2.1 und 3.2.2.

3.2.1. Parallel Ausgänge

Bild 2 zeigt die Parallelschaltung von Ausgängen $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, welche durch einen Strom I_z abgefragt werden kann. Der einzelne Ausgang wird als Haken mit Pfeil gezeichnet, wobei der Pfeil andeutet, daß ein hinreichender Strom entgegen der Pfeilrichtung den Ausgangszweig ummagnetisiert.

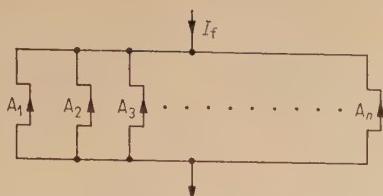


Bild 2. Parallele Ausgänge $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, die durch einen Fragestrom I_f abgefragt werden.

Da alle Ausgänge parallel liegen, können sie auch nur gemeinsam ummagnetisieren. Ihre Pfeile müssen daher auch sämtlich zu einem Knoten hinweisen (siehe Bild 2). Nur dann hat die Parallelschaltung einen Sinn.

Die Ausgangslängen sind bis auf Konstanten nichts anderes als die zur Ummagnetisierung notwendigen Ströme, sie addieren sich bei der Parallelschaltung,

$$L_z = \sum_{i=1}^n L_{ai}. \quad (28)$$

Nach Definition von L_z^1 ergibt sich

$$L_z^1 = \sum_{i=1}^n L_{ai}^1. \quad (29)$$

Von den Ausgangslängen L_{ai}^0 gibt es eine kürzeste, etwa L_{ak}^0 . Dann ist nach Definition

$$L_z^0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n L_{ai}^1 + L_{ak}^0. \quad (30)$$

Schließlich wird mit den Gl. (21) und (25)

$$\Delta L_z = \Delta L_{ak}. \quad (31)$$

Mit $\Delta L_{ak} > 0$ wird auch $\Delta L_z > 0$, die Zusammenschaltung ist also abfragbar.

Gl. (29) entnimmt man, daß $L_z = L_z^1$ nur bei $L_{ai} = L_{ai}^1$ für alle $i = 1, 2, 3, \dots, n$ erfüllt ist. Nach Gl. (2), (22) und (26) ist also

$$z = \prod_{i=1}^n a_i. \quad (32)$$

Die Parallelschaltung realisiert die Konjunktion.

3.2.2. Ausgänge in Serie

Bild 3 zeigt die Serienschaltung der Ausgänge $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Alle Ausgangspfeile müssen dem Strompfel des Fragestromes I_f entgegenlaufen. Ein Ausgang mit umgekehrtem Pfeil könnte durch I_f nicht ummagnetisiert werden, damit auch nicht seine Information abgeben.

Ersichtlich ist

$$L_z = \text{Min}(L_{ai}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (33)$$

Nach Definition von L_z^0 und L_z^1 ist

$$L_z^0 = \text{Min}(L_{ai}^0), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (34)$$

und $L_z^1 = \text{Max}(L_{ai}^1), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (35)$



Bild 3. Ausgänge $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, in Reihe geschaltet.

Mit Gl. (25) wird dann das Zweipolintervall

$$\Delta L_z = \text{Min}(L_{ai}^0) - \text{Max}(L_{ai}^1). \quad (36)$$

Damit $\Delta L_z > 0$ wird, muß die rechte Seite positiv sein oder, was dasselbe ist,

$$L_{ai}^0 > L_{ak}^1 \quad \text{für alle } i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (37)$$

Liegt die Länge des Fragestromes im Zweipolintervall, so wird nur dann nicht ummagnetisiert, wenn alle $L_{ai} = L_{ai}^0$ sind, d. h.

$$\bar{z} = \prod_{i=1}^n \bar{a}_i \quad (38)$$

$$\text{oder } z = \sum_{i=1}^n a_i. \quad (39)$$

Die Serienschaltung realisiert die Disjunktion.

4. Einzelne Eingänge

Im Abschnitt 4 werden solche rechteckmagnetischen Netze betrachtet, die nur einen Eingang besitzen.

4.1. Aufnahme einer Eingangsgröße

Wie schon im Abschnitt 3.1 gezeigt wurde, können in einem rechteckmagnetischen Netz Eingangs- und Ausgangssignal nicht gleichzeitig gegeben werden, vielmehr muß das Eingangssignal zwischengespeichert werden. Da das Einspeichern der Eingangsinformation gegebenenfalls eine Ummagnetisierung darstellt, muß es eine „Eingangswicklung“ geben, die um einen „Eingangszweig“ gelegt ist. We wird als widerstandslos vorausgesetzt.

Es wird verabredet, daß Ummagnetisierung des Eingangszweiges als Eingabe der Eingangsgröße 1 interpretiert werden soll. Bei Eingabe einer 0 wird im allgemeinen der Eingangszweig nicht ummagnetisiert. Ausnahmen sind nur dann zugelassen, wenn der Eingang vor der Eingabe schon eine 1 enthielt. Daraus folgt, daß die Eingabe einer 0 die vorher eingespeicherte Eingangsgröße in keinem Fall ändert. So kann also auch eine im Eingang gespeicherte 1 niemals durch eine 0 überschrieben werden. Man muß daher zusätzlich dafür sorgen, daß zu geeigneter Zeit der Eingang wieder auf 0 gestellt wird.

Der Eingang muß nach Abschnitt 3.1 zwei Signale aufnehmen können: zunächst das Ausgangssignal, danach das Rückstellsignal. Beide liefern bei Aufnahme einer 1 ein dem Betrag nach gleiches $\int U dt$, aber mit verschiedenen Vorzeichen. Wie der Ausgangszweig muß also auch der Eingangszweig hin und zurück magnetisieren, er enthält insbesondere nach der Eingabe nicht mehr die Eingangsgröße.

Damit die Eingangsgröße 1 überhaupt gespeichert wird, muß bei dem ersten Signal, das auch „Setzimpuls“ heißt, ein anderer Ring ummagnetisiert werden als bei dem zweiten Signal, dem „Verriegelungsimpuls“. Die beiden Ringe heißen „Setzring“ und „Verriegelungsring“. Da der Verriegelungs-

impuls grundsätzlich die Möglichkeit hat, auch den Setzring zurückzumagnetisieren, muß, damit dies nicht geschieht, der Verriegelungsring kürzer sein als der Setzring. Schwierigkeiten entstehen durch den kürzeren Verriegelungsring nicht, da er durch den Setzimpuls nicht unmagnetisierbar ist, wenn der Eingang eine 0 enthält.

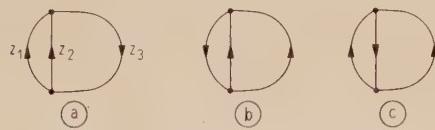


Bild 4. Die möglichen Zustände eines Eingangs mit z_1 als Eingangszweig;

- (a) gelöschter oder 0-Zustand,
- (b) nach Ummagnetisierung des Setzringes,
- (c) nach Ummagnetisierung des Verriegelungsringes, 1-Zustand.

Bild 4 zeigt als Ausschnitt aus einem rechteckmagnetischen Netz, daß die beschriebene Art der Eingabe möglich ist. z_1 ist der Eingangszweig, der zusammen mit z_2 den Verriegelungsring und mit z_3 den Setzring bildet. Der Zustand Bild 4a wird als 0-Zustand des Eingangs gedeutet. Bei Einschreiben einer 1 wird zunächst der Setzring unmagnetisiert, so daß der Zustand Bild 4b entsteht. Nunmehr sind Setz- und Verriegelungsring unmagnetisierbar, tatsächlich magnetisiert aber der Verriegelungsimpuls den kürzeren Verriegelungsring um, so daß der 1-Zustand Bild 4c entsteht.

Die Zweige von Setz- und Verriegelungsring ausschließlich Eingangszweig bilden ursprünglich einen Ring, hier den der Zweige z_2, z_3 . Genau dieser Ring, er heißt „Eingangsring“, speichert die Eingangsgröße.

Der Eingangsring ist, ob er eine 0 oder 1 enthält, stets unmagnetisierbar. Man kann also insbesondere auch im Zustand 1 (Bild 4c) den Eingangsring unmagnetisieren und so wieder den Zustand 0 erreichen. Dieser Vorgang heißt „Löschen“ des Eingangs. Beim Löschen magnetisiert der Eingangszweig nicht um, weil er nicht im Eingangsring enthalten ist.

Die beschriebene Art der Eingabe ist vielleicht die einfachste, aber nicht die einzige mögliche. Zunächst beruht die notwendige Verschiedenheit von Setz- und Verriegelungsring auf der Annahme, daß die beiden Eingangssignale in zwei aufeinander folgenden Zeitintervallen T_1 und T_2 gegeben werden. Läßt man zwischen T_1 und T_2 noch andere Zeitintervalle zu, so kann die mit T_1 eingeschriebene Information zunächst durch geeignete Ummagnetisierungen abtransportiert werden. T_2 darf dann den Setzring zurückmagnetisieren, ohne daß die eingeschriebene Information gelöscht wird. Diese Art der Eingabe wird im Abschnitt 6.2 benutzt.

Zur Beschreibung des Eingangs durch Längen wird festgelegt: Die „Setzlänge“ L_s ist die Länge des Ringes, der während des Setzimpulses mit dem Eingangszweig unmagnetisieren kann. Wird vor jedem Einschreiben gelöscht, so ist L_s stets die

Länge des Setzringes, welche als L_s^0 bezeichnet wird. Wird vor dem Einschreiben nicht gelöscht, so ist, wenn der Eingang schon eine 1 enthält, L_s die Länge des Verriegelungsringes, die als L_s^1 bezeichnet wird. Die stets positive Größe

$$\Delta L_s = L_s^0 - L_s^1 \quad (40)$$

heißt „Setzintervall“.

4.2. Zusammenschaltung von Ausgängen mit einem Eingang

4.2.1. Parallelschaltung

Die Übertragung einer Zweipolfunktion z auf einen Eingang E kann durch Parallelschaltung von Ausgangszweipol Z und Eingang E erfolgen (Bild 5). Der Eingang wird zeichnerisch dargestellt wie ein Ausgang, ebenso ein Ausgangszweipol.

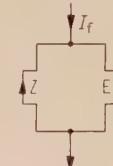


Bild 5. Übertragung der Zweipolfunktion z auf einen Eingang E durch den Fragestrom I_f .

Wenn Z ein einzelner Ausgang ist, gilt für die Parallelschaltung dasselbe wie im Abschnitt 3.2. Eingang und Ausgang müssen gleiche Windungszahlen haben. Bei mehreren Ausgängen in Z haben diese ohnehin sämtlich gleiche Windungszahlen, die dann auch der Eingang E hat. Unter dieser Voraussetzung kann man wieder von einer Länge L_q der Fragequelle sprechen. Aufgabe der folgenden Überlegungen ist es, die erlaubten Grenzwerte für L_q zu finden.

Z und E magnetisieren entweder zusammen um oder gar nicht. In ersterem Fall ist

$$L_q = L_z^1 + L_s^0 = L_q^1. \quad (41)$$

Dies entspricht der Übertragung einer 1 in den gelöschten Eingang. Im Fall $z = 0$ darf nicht unmagnetisiert werden, also muß

$$L_q < L_z^0 + L_s^0 = L_q^0 \quad (42)$$

sein. L_s^0 wird eingesetzt, weil der Eingang als vorher gelöscht vorausgesetzt wird.

Durch Subtraktion der Gl. (42) und (41) ergibt sich das Intervall der Quelle

$$\Delta L_q = L_q^0 - L_q^1 = \Delta L_z > 0. \quad (43)$$

Der Betrieb ist möglich, weil mit $\Delta L_z > 0$ auch $\Delta L_q > 0$ resultiert. Würde man vor dem Einschreiben nicht löschen, so wäre in Gl. (42) L_s^1 anstatt L_s^0 einzusetzen, und anstatt Gl. (43) wäre

$$\Delta L_q = \Delta L_z - \Delta L_s. \quad (44)$$

Mit $\Delta L_q > 0$ wird dadurch eine echte Bedingung für ΔL_z und ΔL_s gestellt.

Durch die Parallelschaltung wird als Eingangsgröße e die Zweipolfunktion z eingeschrieben:

$$e = z. \quad (45)$$

4.2.2. Serienschaltung

Gemäß Bild 6 wird ein Ausgangszweipol Z dem Eingang E in Reihe geschaltet. Die Windungszahlen sollen wieder sämtlich gleich sein.

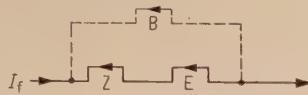


Bild 6. Übertragung der Zweipolfunktion \bar{z} auf den Eingang E.

E wird durch den Fragestrom nur dann ummagnetisiert, wenn $z = 0$ ist, also

$$e = \bar{z}. \quad (46)$$

Damit der gelöschte Eingang gesetzt werden kann, muß

$$L_q \geq L_z^1 = L_s^0 \quad (47)$$

und

$$L_z^0 > L_s^0 \quad (48)$$

sein.

Ist $z = 1$, so soll E nicht ummagnetisiert; der Fragestrom I_f muß dann durch die Ummagnetisierung von Z auf einen Wert begrenzt werden, der zur Ummagnetisierung von E nicht ausreicht:

$$L_z^1 < L_s^0. \quad (49)$$

Nun wirkt der Zweipol Z ja nur solange strombegrenzend, wie er ummagnetisiert. Danach könnte E doch noch ummagnetisieren. Die Stromquelle muß daher so geändert werden, daß sie nur ein begrenztes $\int U dt$ liefern kann, das gerade zur Ummagnetisierung von Z oder E ausreicht, aber nicht für beide. Am einfachsten geschieht diese „Flußbegrenzung“ durch Parallelschaltung eines Ringkernes, der gerade dieses $\int U dt$ zur vollständigen Ummagnetisierung braucht (in Bild 6 als B gestrichelt eingezeichnet).

Eine obere Grenze für L_q gibt es nicht, da nach der Ummagnetisierung der Kern B beliebige Ströme aufnehmen kann.

Die Übertragung der Funktion \bar{z} auf den Eingang E gemäß Gl. (46) ist demnach möglich, wenn die Bedingungen (47), (48) und (49) eingehalten werden was mit $\Delta L_z > 0$ und $L_q > L_s^0$ möglich ist.

Nachdem die Zusammenschaltung von Ausgängen die Booleschen Operationen der Konjunktion und Disjunktion zu realisieren gestattet, liefert dieser Abschnitt auch eine Möglichkeit zur Realisierung der Negation, und mit Abschnitt 4.2.1 gibt es auch die Möglichkeit, Zweipolfunktionen auf Eingänge zu übertragen. Damit ist ein vollständiges System zur Realisierung Boolescher Funktionen gefunden.

5. Mehrere Eingänge, Eingangslogik

5.1. Eingänge mit gemeinsamem Eingangszweig

Die verschiedenen Wicklungen $W_1, W_2, W_3, \dots, W_n$ mit sämtlich gleichen Windungszahlen werden um einen gemeinsamen Eingangszweig gelegt und als Eingänge $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ benutzt. Die

Methode des Einschreibens ist die in Abschnitt 4.1 beschriebene: Die eingeschriebene Größe soll nur dann 1 sein, wenn der Eingangszweig ummagnetiert; dies tut er nacheinander über Setz- und Verriegelungsring. Mit e als eingeschriebener Größe soll die Funktion

$$e = \prod_{i=1}^n e_i \quad (50)$$

eingeschrieben werden.

Die einzelnen Eingänge E_i erhalten ihre Information von anderen Ausgängen oder Ausgangszweipolen. Nun gilt für Parallelschaltung wie auch Serienschaltung des Einganges (Abschnitt 4.2), daß bei Übermittlung einer 0 stets weniger Strom durch den Eingang fließt als bei Übermittlung der 1, weil dann ja der Setzring ummagnetisieren soll. Die Möglichkeit dazu ergab sich stets aus dem von Null verschiedenen Zweipolintervall und passend gewählter Fragequelle, hatte aber sonst nichts mit dem benutzten Eingang zu tun.

Jedem der hier benutzten Eingänge E_i wird daher mit der 1 ebenfalls mehr Strom geliefert als mit der 0. Ersterer soll der Länge L_s^0/n entsprechen, letzterer ist kleiner. Da der Setzring aber nur mit L_s^0 ummagnetisieren kann, müssen, damit dies geschieht, alle n Eingänge gleichzeitig eine 1 geliefert bekommen, also Ströme der Länge L_s^0/n , deren Summe gerade L_s^0 wird. In allen anderen Fällen ist die Summe kleiner, es wird also gerade die Funktion (50) eingeschrieben.

Die beschriebene Methode ist von den Ringkernschaltungen her als „Stromkozidenz“ bekannt.

5.2. Eingänge mit gemeinsamem Eingangsring

Im Abschnitt 5.1 hatten die verschiedenen Eingänge außer den Wicklungen alles gemeinsam: den Eingangszweig, Setz- und Verriegelungsring und damit auch den Eingangsring. In diesem Abschnitt werden Eingänge mit weniger Gemeinsamkeit betrachtet: Jeder Eingang hat einen eigenen Eingangszweig, damit auch Setz- und Verriegelungsring. Gemeinsam ist allen noch der Eingangsring.

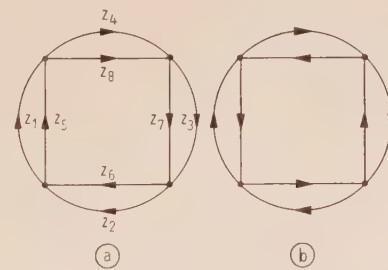


Bild 7. Ein rechteckmagnetisches Netz, in dem die Zweige z_1, z_2, z_3 als Eingangszweige benutzt werden;
(a) 0-Zustand,
(b) 1-Zustand.

Bild 7 zeigt für diese Möglichkeit ein einfaches Beispiel: Das gezeichnete Netz besitzt drei Eingangszweige z_1, z_2, z_3 . Diese bilden ihre Verriegelungsringe über die Zweige z_5, z_6, z_7 , und der ge-

meinsame Eingangsring wird von den inneren Zweigen z_5, z_6, z_7, z_8 gebildet. Für die Setzringe treten einige Besonderheiten auf, die am Ende dieses Abschnittes näher betrachtet werden.

Die Zweige z_4, z_8 können als Ausgangsring mit z_4 als Ausgangszweig benutzt werden.

Bild 7a zeigt den 0-Zustand des Netzes, Bild 7b den 1-Zustand. Für die Eingabe sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1. In nur einen Eingang wird eine 1 eingeschrieben.
2. In nur zwei Eingänge wird eine 1 eingeschrieben.
3. In alle drei Eingänge wird eine 1 eingeschrieben.

Es wird vorausgesetzt, daß der Eingangsring vor jedem Einschreiben gelöscht ist. Dann erfolgt die Eingabe im Fall 1 entsprechend Bild 4. Es entsteht der 1-Zustand von Bild 7b.

Im Fall 2 werden mit dem Setzimpuls die beiden Eingangszweige ummagnetisiert und außerdem noch die beiden gegenüberliegenden Innenzweige. Beim Verriegelungsimpuls magnetisieren beide Eingangszweige über ihre Verriegelungsringe um, so daß wieder der Endzustand Bild 7b entsteht.

Im Fall 3 magnetisieren während des Setzimpulses alle Eingangszweige zusammen mit z_8 um, und der Verriegelungsimpuls magnetisiert alle Verriegelungsringe um. Wieder entsteht der Endzustand Bild 7b.

In allen Fällen ist der Endzustand stets derselbe, nämlich der 1-Zustand des Netzes. Nur dann, wenn kein Eingangszweig eine 1 erhält, bleibt der 0-Zustand erhalten. Die eingeschriebene Größe ist also

$$e = e_1 + e_2 + e_3. \quad (51)$$

Die beschriebene Methode zur Realisierung der Disjunktion zeigt etwas wesentlich Neues: Für den einzelnen Eingang gibt es verschiedene Setzringe für die drei Fälle 1, 2 und 3. Im Fall 1 führt der Setzring über einen Eingangszweig und drei Innenzweige, im Fall 2 haben beide Eingänge, die eine 1 erhalten, einen gemeinsamen Setzring, der außer den beiden Eingangszweigen noch zwei Innenzweige besitzt. Im Fall 3 benutzen alle Eingänge den gemeinsamen Setzring der Zweige z_1, z_2, z_3, z_8 .

Man kann die Struktur des Bildes 7 ersichtlich auf $n > 3$ Eingänge erweitern und realisiert so die Funktion

$$e = \sum_{i=1}^n e_i. \quad (52)$$

5.3. Eingänge mit nur teilweise gemeinsamem Eingangsring

Die Gemeinsamkeit der Eingänge war im Abschnitt 5.2 der Eingangsring. Eingänge mit völlig getrennten Eingangsringen kann man einzeln beschreiben, sie bieten nichts Neues gegenüber dem in Abschnitt 4.1 beschriebenen Eingang. Bleibt also noch die Behandlung von Eingängen mit teilweise gemeinsamen Eingangsringen.

Die Realisierung dieser Möglichkeit ist allerdings zunächst mit Schwierigkeiten verbunden:

Sind etwa die gemeinsamen Zweige in den verschiedenen Setzringen enthalten, so müßten diese

den magnetischen Fluß aller Eingangszweige aufnehmen, wenn diese gleichzeitig ummagnetisieren. Dies ist bei n Eingängen n -mal soviel wie sie aufnehmen können. Das Entsprechende gilt für gemeinsame Zweige in den Verriegelungsringen.

Es ist möglich, daß ein Eingang Zweige seines Verriegelungsrings mit Zweigen des Setzringes eines anderen Einganges gemeinsam hat. Dabei sperrt aber der zweite Eingang den Verriegelungsring des ersten, sobald in ihn eine 1 gesetzt ist. Dieser bei geeigneten Erweiterungen grundsätzlich mögliche Fall soll ebenfalls ausgeschlossen werden.

Dann bleibt nur noch der Ausweg, wie im Abschnitt 5.2, jedem Eingang eine Anzahl verschiedener Setzringe zu geben, so viele, daß in jedem Fall der Setzimpuls einen dieser Ringe ummagnetisieren kann. Man braucht bei n Eingängen für jeden genau n verschiedene Setzringe, was im Grunde dasselbe ist wie die oben erwähnte Bedingung, daß die gemeinsamen Zweige n -mal soviel Fluß aufnehmen müssen wie die Eingangszweige.

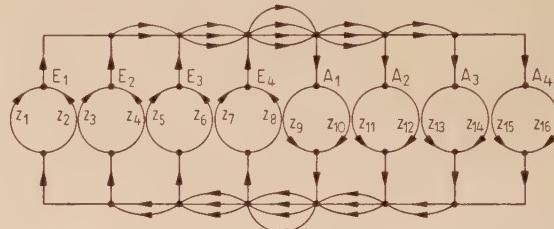


Bild 8. Ausschnitt aus einem rechteckmagnetischen Netz mit vier Eingängen E_1, E_2, E_3, E_4 und vier Ausgängen A_1, A_2, A_3, A_4 zur Realisierung der Funktionen (53), (54), (55), (56). Gezeichnet ist der 0-Zustand.

Bild 8 zeigt ein rechteckmagnetisches Netz¹, welches jedem der vier Eingänge auch jeweils vier verschiedene Setzringe bietet. Gemeinsame Zweige der Eingangsringe treten hier also nur in den Setzringen auf. Die Eingangszweige z_1, z_3, z_5, z_7 bilden ihre Verriegelungsringe über die Zweige z_2, z_4, z_6, z_8 . Die Zweige $z_{10}, z_{12}, z_{14}, z_{16}$ können als Ausgangszweige benutzt werden, sie bilden mit $z_9, z_{11}, z_{13}, z_{15}$ ihre Ausgangsringe. Allen Eingängen stehen die Setzringe über z_9 oder z_{11} oder z_{13} oder z_{15} zur Verfügung. Bild 8 zeigt den 0-Zustand des Netzes, der vor jedem Einschreiben hergestellt wird.

Wird in nur einen Eingang eine 1 eingeschrieben, so führt dessen Setzring über z_9 , weil dieser Weg von den verfügbaren der kürzeste ist. Bei anschließendem Abfragen liefert Ausgang A_1 eine 1, alle anderen Ausgänge eine 0.

Wird gleichzeitig in zwei Eingänge eine 1 eingeschrieben, so werden die Setzringe über z_9 und z_{11} als die kürzesten benutzt. Nach dem Einschreiben enthalten nur die Ausgänge A_1 und A_2 eine 1.

¹ Zur Erfüllung der Knotenregel (siehe [10]) ist in jeden Verriegelungs- und Ausgangsring noch ein weiterer Zweig einzufügen, der aber für den vorgesehenen Betrieb des Netzes ohne Bedeutung ist. Diese Zweige sind wegen der Übersichtlichkeit in Bild 8 nicht eingezeichnet.

Bei gleichzeitigem Einschreiben einer 1 in drei Eingänge erhält auch A₃ noch eine 1 eingeschrieben und schließlich noch A₄, wenn in alle vier Eingänge eine 1 eingeschrieben wird.

Die Ausgangsgrößen sind demnach

$$a_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \quad (53)$$

$$a_2 = e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_1 e_4 + e_2 e_3 + e_2 e_4 + e_3 e_4, \quad (54)$$

$$a_3 = e_1 e_2 e_3 + e_1 e_2 e_4 + e_1 e_3 e_4 + e_2 e_3 e_4, \quad (55)$$

$$a_4 = e_1 e_2 e_3 e_4. \quad (56)$$

Man sieht leicht, daß die Struktur in Bild 8 beliebig erweitert werden kann.

Diese leiterartige Struktur wurde in ähnlicher Form auch in [4] benutzt und dort als „laddic“ bezeichnet.

Die im Abschnitt 5 gezeigten Möglichkeiten zur Realisierung Boolescher Funktionen werden unter der Bezeichnung „Eingangslogik“ zusammengefaßt. Ihr wesentliches Kennzeichen ist, daß die Realisierung wegen der gegenseitigen Kopplung der Eingänge zustande kommt.

6. Operationen im Inneren rechteckmagnetischer Netze

Bild 7 zeigt ein rechteckmagnetisches Netz mit Eingangs- und Ausgangsring. Die in den Taktzeiten T₁, T₂ eingeschriebene Größe e kann mit den folgenden Takten T₃, T₄ am Ausgang gelesen werden. Dazu ist es nötig, daß Eingangs- und Ausgangsring wenigstens einen Zweig gemeinsam haben, und das ist in Bild 7 mit z₈ der Fall.

Solange der Ausgangsring neben dem Ausgangszweig nur noch einen weiteren Zweig besitzt, kann ihm auch nur die Information eines Eingangsrings mitgeteilt werden. Man kann aber dem Ausgangsring mehr Zweige geben, von denen jeder, mit Ausnahme des Ausgangszweiges, einem anderen Eingangsrings angehört. So wird dem Ausgang eine gesammelte Information mehrerer Eingangsrings übermittelt. Diese Möglichkeit wird im Abschnitt 6.3 näher besprochen. Es wird sich zeigen, daß auf diese Weise eine Konjunktion realisiert werden kann.

Läßt man die Voraussetzung fallen, daß der Ausgang direkt nach der Eingabe gelesen werden kann, so läßt sich der Ring, welcher bisher Ausgangsring war, auch als „Ring für Zwischenergebnisse“ benutzen. Der frühere Ausgangszweig kann dann etwa einem neuen Ausgangsring angehören. Allgemein ist an eine Realisierungsmethode gedacht, bei der zunächst die Eingangsgrößen in verschiedene Eingänge geschrieben werden. Diese Größen werden dann taktweise in Richtung Ausgang transportiert, wobei gleichzeitig eine Zusammenführung und damit Verarbeitung der Eingangsgrößen zu Zwischenergebnissen erfolgt, bis schließlich am Ausgang die gewünschte Funktion gelesen werden kann. Mit solchen Möglichkeiten befaßt sich ebenfalls Abschnitt 6.3.

Zur Klärung der Fragen, die mit dem Transport der Information zusammenhängen, sind die Ab-

schnitte 6.1 und 6.2 eingefügt. Es zeigt sich, daß zwei wesentlich verschiedene Methoden des Transports möglich sind: In einem Fall (Abschnitt 6.1) bleibt die eingeschriebene Größe in ihrem Eingang stehen, solange sie durch das Netz transportiert wird, sie kann nur mit dem gesamten Netz gelöscht werden. Im zweiten Fall (Abschnitt 6.2) wird der Eingang so früh wie möglich wieder gelöscht. Die eingeschriebene Größe wird örtlich konzentriert durch das Netz transportiert, insbesondere kann man auch mehrere unabhängige Eingangsgrößen nacheinander eingeben und nach einer durch das benutzte Netz gegebenen Laufzeit wieder auslesen, ohne daß das Netz zu irgendeiner Zeit insgesamt gelöscht werden muß.

6.1. Informationstransport ohne Löschen des Einganges

Bild 9 zeigt als Ausschnitt aus einem rechteckmagnetischen Netz eine für den reinen Informationstransport geeignete Struktur. Aus dem gezeichneten Ausschnitt wird ein vollständiges Netz, wenn man

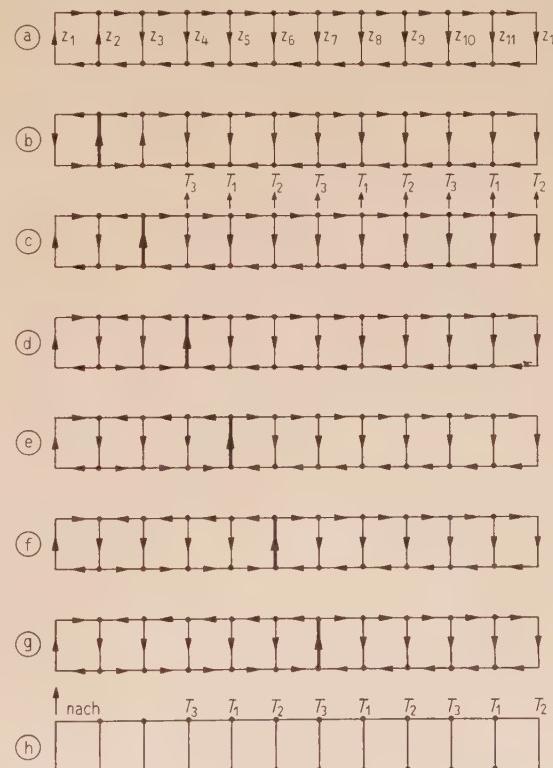


Bild 9. Ausschnitt aus einem rechteckmagnetischen Netz, welches zum Informationstransport ohne Löschen des Einganges benutzt werden kann;

- (a) gelöschter oder 0-Zustand,
- (b) nach Ummagnetisierung des Setzringes z₁, z₃ mit Takt T₁,
- (c) nach Ummagnetisierung des Verriegelungsringes z₁, z₂ mit T₂,
- (d) nach T₃,
- (e) nach T₁,
- (f) nach T₂,
- (g) nach T₃,
- (h) Lage des nach oben gerichteten Pfeiles nach den verschiedenen Taktzeiten.

so viele Zweige zufügt, daß für alle Knoten des Netzes eine Knotenregel (siehe [10]) erfüllt wird. Diese Zweige sind aber für den vorgesehenen Betrieb des Netzes ohne Bedeutung und wurden daher nicht eingezeichnet.

Als Eingangszweig wird z_1 benutzt, der mit z_2 und z_3 seinen Verriegelungs- und Setzring bildet.

Zum Transport der Information wird ein Taktzyklus T_1 , T_2 , T_3 benutzt. Während dieser Zeiten wird durch Wicklungen um die Zweige z_4 , z_5 , z_6 , ..., z_{12} Strom geschickt, der diese aufwärts zu magnetisieren versucht (Bild 9c). Die einzelnen Ströme sind so begrenzt, daß dies nur über benachbarte Zweige geschehen kann. Dann wird im gelöschten Zustand Bild 9a nicht unmagnetisiert.

Wird nun mit T_1 der Setzring unmagnetisiert (Bild 9b) und mit T_2 der Verriegelungsring, so entsteht der Magnetisierungszustand Bild 9c. Nunmehr kann während T_3 auch z_4 zusammen mit z_3 unmagnetisiert werden, danach mit T_1 auch z_5 und z_4 usw. Es entstehen nacheinander die Zustände von Bild 9d-g.

Durch jeden Takt wird ein nach oben gerichteter Pfeil (in Bild 9b-g stark gezeichnet) um einen Zweig weiter nach rechts transportiert.

Benutzt man z_{12} als Ausgangszweig, der mit z_{11} den Ausgangsring bildet, so kann dieser mit T_2 abgefragt und mit T_3 zurückgestellt werden. Mit T_3 läßt sich auch gleichzeitig das gesamte Netz löschen.

Wie man Bild 9h entnimmt, liefert erst der vierte T_2 -Impuls nach dem Setzen einer 1 die zugehörige Ausgangsgröße 1.

Die regelmäßige Struktur in Bild 9 ist ersichtlich beliebig fortsetzbar, eines bleibt aber immer: Solange eine 1 durch das Netz transportiert wird, behält auch der Eingang seine 1. Er kann erst dann gelöscht werden, wenn die transportierte Größe am Ausgang abgefragt ist. Davor wird durch abermaligen Versuch, eine 1 einzuschreiben, lediglich der Verriegelungsring hin- und zurückmagnetisiert, was sonst ohne Wirkung bleibt.

Der benutzte Taktzyklus war der kürzest mögliche; längere Taktzyklen sind selbstverständlich verwendbar.

6.2. Informationstransport mit Löschen des Einganges

Im Abschnitt 4.1 wurde die Methode der Eingabe erklärt. Die Unterscheidung von Setz- und Verriegelungsring war notwendig, wenn Setz- und Verriegelungsimpuls direkt aufeinander folgten. Wenn man aber mit T_1 setzt und erst mit T_3 verriegelt, sollte man mit T_2 irgendeine Ummagnetisierung versuchen, so daß die eingeschriebene Information auch dann gespeichert wird, wenn Setz- und Verriegelungsring identisch sind und daher nach T_3 die eingeschriebene Information nicht mehr enthalten.

Tatsächlich ist dies mit einer Struktur entsprechend Bild 10 möglich. z_1 ist der Eingangszweig, der mit z_2 seinen Setzring bildet. Wird mit T_1 eine 1 eingeschrieben, so begibt sich das Netz vom gelöschten Zustand Bild 10a in den Zustand Bild 10b.

Der Zweig z_3 besitzt eine Wicklung, mit deren Hilfe er zur Zeit T_2 stets nach unten magnetisiert wird (keine Strombegrenzung der Quelle). Vom Zustand Bild 10b aus magnetisiert mit z_3 der Zweig z_4 um, es entsteht der Zustand Bild 10c. Der Verriegelungsimpuls wird nun mit T_3 gegeben (siehe Bild 10c), so daß der Setzring zurückmagnetisiert. Es entsteht der Zustand Bild 10d.

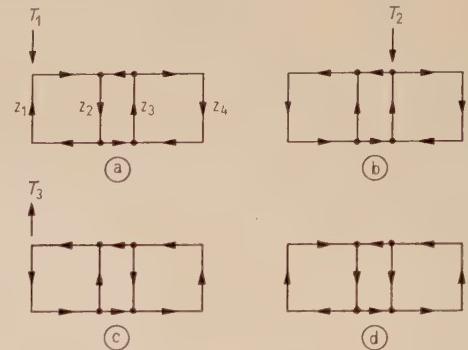


Bild 10. Eine neue Methode der Eingabe. z_1 ist Eingangszweig;

- (a) 0-Zustand des Einganges.
- (b) nach Ummagnetisierung des Setzringes z_1 , z_2 mit T_1 ,
- (c) nach Ummagnetisierung des Ringes z_3 , z_4 mit T_2 .
- (d) nach Rückmagnetisierung des Setzringes z_1 , z_2 mit T_3 . Der Eingang ist wieder gelöscht, die eingeschriebene 1 ist in z_4 gespeichert.

Durch Vergleich von Bild 10a und 10d sieht man, daß der Setzring in beiden Fällen gelöscht ist. Die eingeschriebene 1 wird durch den Magnetisierungszustand des Zweiges z_4 repräsentiert.

Hätte man mit T_1 keine 1 eingeschrieben, so wäre mit T_2 der Ring der Zweige z_2 , z_3 unmagnetisiert, und der nach unten gerichtete Magnetisierungszustand des Zweiges z_4 , welcher die 0 repräsentiert, wäre erhalten geblieben.

Zur Ermöglichung eines weiteren Informationstransports braucht man nur die Struktur entsprechend Bild 10 weiter fortzusetzen. Bild 11 zeigt eine solche auf 17 Zweige erweiterte Struktur, welche wie die des Bildes 9 als Ausschnitt zu betrachten ist.

Bild 11a zeigt den gelöschten Zustand. Die Zweige z_3 , z_5 , z_7 , ..., z_{15} tragen jeweils zwei Wicklungen, mit deren Hilfe sie in den angegebenen Taktzeiten (siehe Bild 11a) unmagnetisiert werden. Für die dafür zu benutzenden Ströme gibt es keine obere Begrenzung.

Als kürzest möglicher Zyklus wird ein 4-Takt-Zyklus benutzt. Im gelöschten Zustand (Bild 11a) bewirken die Taktströme lediglich eine Hin- und Rückmagnetisierung nahe benachbarter Zweige, z. B. magnetisieren mit T_2 die Zweige z_2 und z_3 zusammen um, anschließend mit T_4 wieder zurück.

Wird durch Setzen einer 1 in den Eingangszweig z_1 zur Zeit T_1 dieser unmagnetisiert, so entsteht ein neuer Zustand (Bild 11b). Nunmehr magnetisiert während T_2 mit z_3 der Zweig z_4 um, so daß der Zustand Bild 11c entsteht. Mit T_3 wird der Ver-

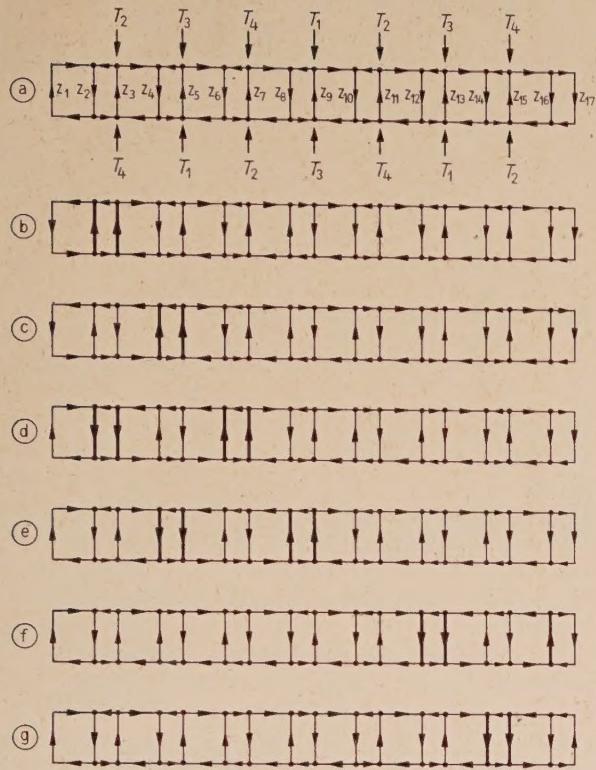


Bild 11. Ausschnitt aus einem rechteckmagnetischen Netz, welches zum Informationstransport mit Löschen des Einganges benutzt werden kann;

- (a) gelöschter Zustand,
- (b) nach Ummagnetisierung des Setzringes z_1, z_2 mit T_1 ,
- (c) nach T_2 ,
- (d) nach T_3 ,
- (e) nach T_4 , der Eingang ist wieder gelöscht,
- (f) nach dem folgenden T_4 ,
- (g) nach dem folgenden T_1 , der Ausgangsring z_{16}, z_{17} wurde abgefragt und lieferte die eingeschriebene 1.

riegelungsimpuls aufgenommen, so daß der Zustand Bild 11d entsteht. Gleichzeitig waren mit T_3 auch die Zweige z_5 und z_6 ummagnetisiert.

Die Rückmagnetisierung von z_3 erfolgt mit T_4 , und wieder über z_4 . Gleichzeitig wird durch Ummagnetisierung der Zweige z_7 und z_8 die eingeschriebene 1 weiter nach rechts transportiert. Bild 10e zeigt den Zustand nach T_4 .

Mit dem folgenden Takt T_1 geht der Transport der eingeschriebenen 1 weiter, gleichzeitig kann am Eingang auch wieder neu eingeschrieben werden.

Bild 11f zeigt den Zustand des Netzes nach dem zweiten Takt T_4 . Mit dem zweiten Takt T_1 war keine 1 eingeschrieben worden. Die mit dem ersten T_1 eingeschriebene 1 hat inzwischen z_{16} erreicht und kann mit dem folgenden T_1 abgefragt werden, wenn man z_{17} als Ausgangszweig benutzt. Den Zustand nach dem Abfragen zeigt Bild 11g.

Die Wanderung einer eingeschriebenen 1 kann man leicht verfolgen, weil durch jeden Takt zwei nach oben gerichtete Pfeile in nahe benachbarten Zweigen um zwei Zweige weiter nach rechts transportiert werden (in Bild 10b-f stark gezeichnet).

Der linke von beiden repräsentiert die eingeschriebene 1. Zweig z_{17} bildet als Ausgangszweig eine Ausnahme, er müßte in Bild 11a nach oben magnetisiert sein, wenn sich die Struktur weiter nach rechts fortsetzte.

Diesen zwei nach oben gerichteten Pfeilen folgen mit vier Zweigen Abstand zwei nach unten gerichtete Pfeile (in Bild 11d-g stark gezeichnet). Links von diesen ist, sofern keine weitere 1 folgt, stets der selbe Magnetisierungszustand, wie ihn das gelöschte Netz hätte. Die eingeschriebene Information bleibt damit auf einen Bereich von sechs benachbarten Zweigen konzentriert.

Daß die zwei nahe benachbarten gleichgerichteten Pfeile tatsächlich eine eingeschriebene 1 eindeutig kennzeichnen, sieht man leicht durch Vergleich von Bild 11b-g mit Bild 11a. Ein solcher Zustand tritt im gelöschten Zustand (Ausnahme ist der Ausgangsring z_{16}, z_{17}) nicht auf, wie man leicht nachprüft, auch nicht nach T_1, T_2 oder T_3 .

Die Struktur entsprechend Bild 11 kann beliebig verlängert werden. Sie ist als Schieberegister verwendbar.

6.3. Koinzidenzringe

Bisher wurden nur Ausgangsringe mit zwei Zweigen betrachtet, nunmehr sollen es mehr sein, etwa fünf, wie Bild 12 zeigt.

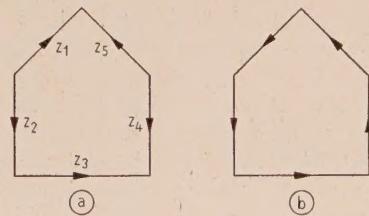


Bild 12. Ein Ausgangsring mit fünf Zweigen, z_5 ist Ausgangszweig;

- (a) ein 0-Zustand,
- (b) der 1-Zustand.

Der Zweig z_5 wird als Ausgangszweig benutzt, die übrigen Zweige z_1, z_2, z_3, z_4 sollen zu vier verschiedenen Eingangsringen (in Bild 12 nicht gezeichnet) der Eingänge E_1, E_2, E_3, E_4 gehören. In den gelöschten Zuständen der Eingänge seien die Zweige z_1, z_2, z_3, z_4 so magnetisiert wie in Bild 12a. Der Ausgangsring ist aber nur dann ummagnetisierbar, wenn die Zweige wie in Bild 12b magnetisiert sind. Um dies zu erreichen, muß man in die Eingänge E_1 und E_4 je eine 1 einschreiben, nicht aber in E_2 und E_3 . Es gilt also

$$a = e_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3 e_4. \quad (57)$$

Der Zweig z_5 braucht nicht Ausgangszweig zu sein, er kann zusammen mit anderen Zweigen einen anderen Ausgangsring bilden und spielt in diesem die gleiche Rolle wie im Beispiel von Bild 12 die Zweige z_1, z_2, z_3, z_4 .

Für den Ring aus Bild 12 ist wesentlich, daß er die Konjunktion (57) dem Zweig z_5 mitteilt. Ob nun z_5 Ausgangszweig ist, ist ohne Bedeutung. Ebenso in-

teressiert nicht, wie die Zweige z_1, z_2, z_3, z_4 ihre Information erhalten, ob als Teile von Eingangsringen oder anders. Der Ring soll daher auch nicht Ausgangsring heißen, sondern „Koinzidenzring“, und z_5 ist nicht Ausgangszweig, sondern „Ergebniszweig“. Die Zweige z_1, z_2, z_3, z_4 sind die „Eingangszweige des Koinzidenzringes“.

Ein Koinzidenzring mit n Zweigen, von denen die ersten m ummagnetisieren müssen, damit der gesamte Ring ummagnetisierbar wird, realisiert mit z_n als Ergebniszweig die Funktion

$$a = \sum_{i=1}^m e_i + \sum_{i=m+1}^{n-1} \bar{e}_i. \quad (58)$$

Mit Hilfe von Koinzidenzringen ist jede Boolesche Funktion realisierbar. Man schreibt die Funktion zunächst in ihrer Normalform

$$a = \sum S_i, \quad (59)$$

wobei die S_i Konjunktionen der Form (58) sind. Anstatt Gl. (59) kann man auch

$$a = \prod \bar{S}_i \quad (60)$$

schreiben, was dasselbe bedeutet.

Die Realisierung erfolgt dann so:

Mit T_1, T_2 werden die Eingangsgrößen in Eingänge mit sämtlich verschiedenen Eingangsringen eingeschrieben. Dabei ist für jedes e_i und \bar{e}_i aus Gl. (60) ein eigener Eingang zu benutzen.

Die S_i werden einzeln mit Koinzidenzringen realisiert, deren Ummagnetisierung mit T_3 versucht wird. Die Ergebniszweige, welche also die S_i repräsentieren, werden wieder zu einem Koinzidenzring zusammengefaßt, dessen Ummagnetisierung mit T_4 versucht wird. Sein Ergebniszweig repräsentiert $\prod \bar{S}_i$, also nach Gl. (60) auch \bar{a} . Der Ergebniszweig bildet zusammen mit dem Ausgangszweig einen Ausgangsring, der noch die Negation realisiert. Der Ausgang wird mit T_5 abgefragt und mit T_6 zurückgestellt. Bild 13 zeigt schematisch die notwendige Struktur.

Die beschriebene Realisierungsmethode benutzt einen 6-Takt-Zyklus, kürzere Zyklen sind nicht möglich, weil eine Funktion zu ihrer Realisierung im

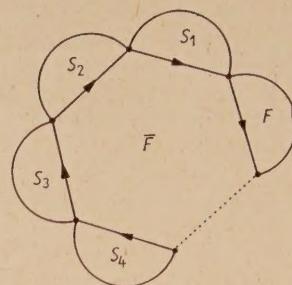


Bild 13. Schematische Darstellung zur Realisierung der allgemeinen Booleschen Funktion nach den Gl. (58), (59), (60) mit den Koinzidenzringen S_i, \bar{F}, F .

allgemeinen drei Gruppen von Koinzidenzringen benötigt, die nacheinander abgefragt werden. Das Abfragen der Koinzidenzringe ist immer auch ein Informationstransport, und zwar von der im Abschnitt 6.1 beschriebenen Art: Die Eingangsinformation bleibt in den Eingängen stehen, Zwischenergebnisse zusätzlich noch in den einzelnen Koinzidenzringen.

Die Realisierung Boolescher Funktionen mit Koinzidenzringen erfolgt nach dem Einschreiben der Eingangsgrößen im Inneren rechteckmagnetischer Netze, sie wird daher auch „Innere Logik“ genannt.

Schrifttum

- [1] LO, A. W. und RAJCHMAN, J. A., The transfluxor — a magnetic gate with stored variable setting. *RCA Rev.* **16** [1955], 303–311.
- [2] LO, A. W. und RAJCHMAN, J. A., The transfluxor. *Proc. Inst. Radio Engrs.* **43** [1956], 321–332.
- [3] ABBOTT, H. W. und SURAN, J. J., Temperature characteristics of the transfluxor. *Transact. Inst. Radio Engrs. ED-4* [1957], 113–117.
- [4] GIANOLA, U. F. und COWLEY, T. H., The laddie, a magnetic device for performing logic. *Bell Syst. tech. J.* **38** [1959], 45–72.
- [5] DARRÉ, A., Abfragen magnetischer Speicher ohne Informationsverlust. *Frequenz* **11** [1957], 19–27, 38–42.
- [6] EICHBAUM, B. R., Evaluation of new high-speed magnetic ferrite system for use in computer components. *J. appl. Phys.* **30** [1959], 49 S–53 S.
- [7] LOCKHART, N. F., Logic by ordered flux changes in multipath ferrite cores. *Inst. Radio Engrs. Nat. Conv. Rec.* **6** [1958], part 4, 268–278.
- [8] CRANE, H. D., A high-speed logic system using magnetic elements and connecting wire only. *Proc. Inst. Radio Engrs.* **47** [1959], 63–73.
- [9] PRYWES, N. S., Diodeless magnetic shift registers utilizing transfluxors. *Transact. Inst. Radio Engrs. EC-7* [1958], 316–324.
- [10] HÖLKEN, U., Das magnetische Netzwerk mit je zwei möglichen Zuständen seiner Zweige. *Nachrichtentech. Fachber.* **21** [1960], 65–68.

Mitarbeiter dieses Heftes:

Dipl.-Phys. U. Hölkens, Neuried bei München, Grubenstraße 4; Prof. Dr. H. Kaden, i. H. Siemens & Halske AG, Zentral-Laboratorium, München 25, Hofmannstraße 51; Dipl.-Phys. K. Löhn, im Institut für angewandte Physik der Universität, Marburg (Lahn), Renthof 7; Ing. P. Meyerer, i. H. Siemens & Halske AG, Röhrenfabrik, München 8, St.-Martin-Straße 76; Dr. G. Pieck, i. H. Siemens & Halske AG, Zentral-Laboratorium, München 25, Hofmannstraße 51; Dr. K. Schnetzler, i. H. Siemens & Halske AG, Zentral-Laboratorium, München 25, Hofmannstraße 51; Dr. G. Schweizer, im Institut für elektrische Anlagen der Technischen Hochschule, Stuttgart-N, Herdweg 51; Dipl.-Phys. H. Weinert und Prof. Dr. H. Wolter, im Institut für angewandte Physik der Universität, Marburg (Lahn), Renthof 7.

Alle Rechte, auch die der photomechanischen Wiedergabe, sind vorbehalten, jedoch wird gewerblichen Unternehmen die Anfertigung einer photomechanischen Vervielfältigung (Photokopie, Mikrokopie) von Beiträgen oder Beitragsteilen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens gegen Bezahlung der dort vorgesehenen Gebühren an die Inkassostelle für Photokopiergebühren beim Börsenverein des Deutschen Buchhandels, Frankfurt am Main, gestattet. Werden die Gebühren durch Wertmarken der Inkassostelle entrichtet, so ist für jedes Photokopierblatt eine Marke im Betrag von –,30 DM zu verwenden.



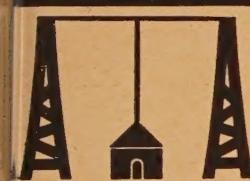
SEL

Erfahrung
und Leistung...



890423118961
30472830
1365693671
5227439365
05527879227

1958



1950



1900



1850

Erfahrung, Leistung und Erfolg sind der feste Grund, in dem die Standard Elektrik Lorenz AG wurzelt: Nachrichtentechnische Firmen wie Lorenz, Mix & Genest, Schaub und SAF leisteten wesentliche Pionierarbeit bei der Entwicklung der Telegrafie und Telefonie, des Rundfunks und des Fernsehens. Diese Firmen – das Können und der Geist ihrer Gründer, die schöpferischen Leistungen ihrer Techniker und



Ingenieure – sind zusammengewachsen zur Standard Elektrik Lorenz AG. Das Entwicklungs- und Produktionsprogramm dieses modernen Unternehmens umfaßt die ganze Nachrichtentechnik.

Standard Elektrik Lorenz AG · Stuttgart

... die ganze Nachrichtentechnik!

